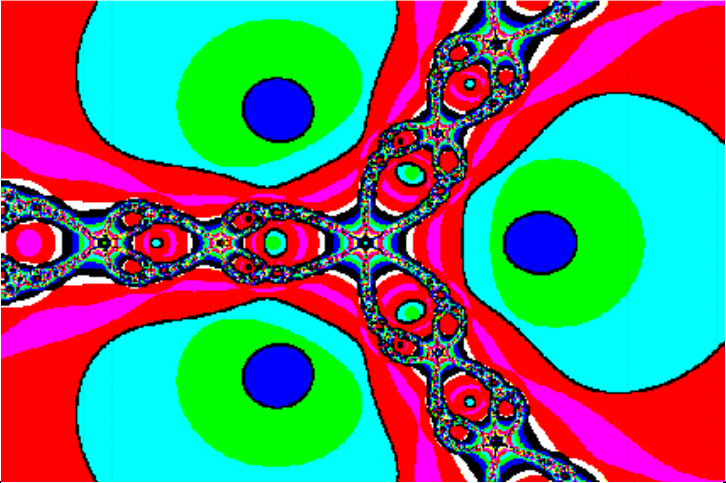
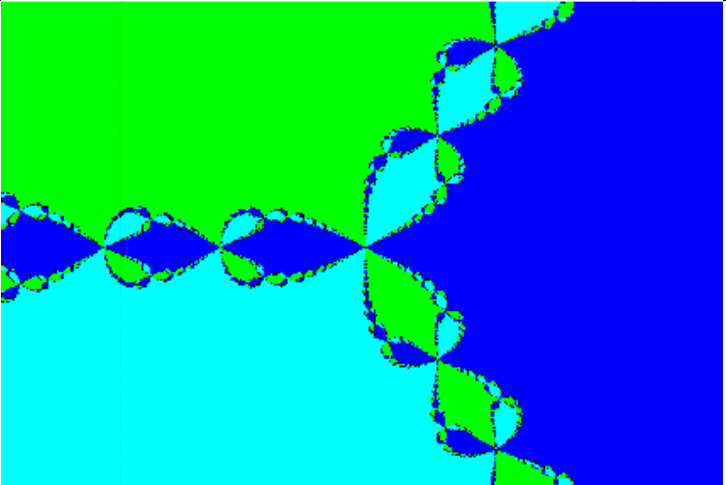
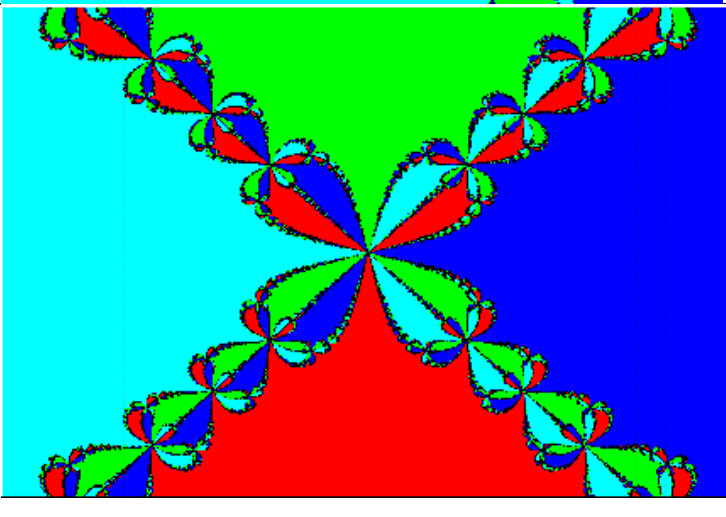
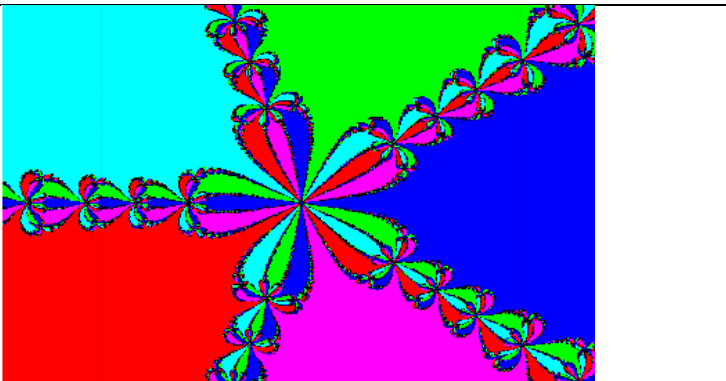
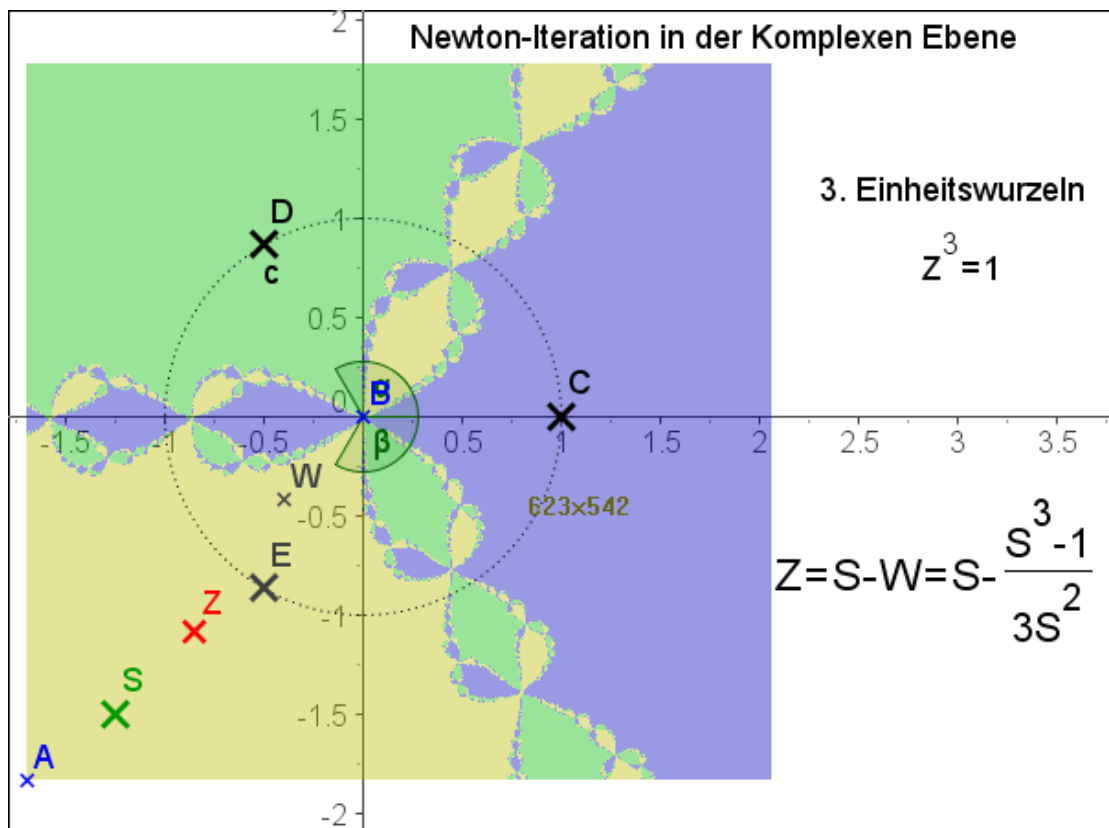


## Newton-Rekursion im Komplexen

	<p>Kreisteilungspolynom</p> $f(z) = z^3 - 1$ <p>Nullstellen gesucht,</p> $\text{newt}(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2} \quad \text{Newtonformel}$ <p>Als Rekursion geschrieben</p> $z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}$
	<p>Die drei Lösungen sind die Mitten der drei blauen Kreise. Für das obere Bild wird ein Startpunkt gewählt und dann wird iteriert. Durch die Farben wird dargestellt, wie lange es braucht, bis die Folgenglieder in einem der blauen Punkte landen. Also grün braucht 1 Schritt, türkis 2 Schritte, rot 3 Schritte u.s.w..</p>
	<p>Beim zweiten und den folgenden Bildern richtet sich die Farbe des Startpunktes nach dem Zielpunkt der Folge. Wenn z.B. die linke obere Lösung der Grenzwert der Folge ist, wird der Startpunkt grün gefärbt. Erstaunliches passiert an den Grenzen dieser Einzugsbereiche. Es bilden sich fraktale Knospen, deren Ränder nur Punkte enthalten, die <b>Dreiländerecke</b> sind.</p>
	<p>Beim 3. bzw. 4. Bild ist das entsprechende für das Polynom 4. bzw. 5. Grades dargestellt und jeder Randpunkt der Gebiete ist ein 4- bzw. 5-Ländereck.</p>

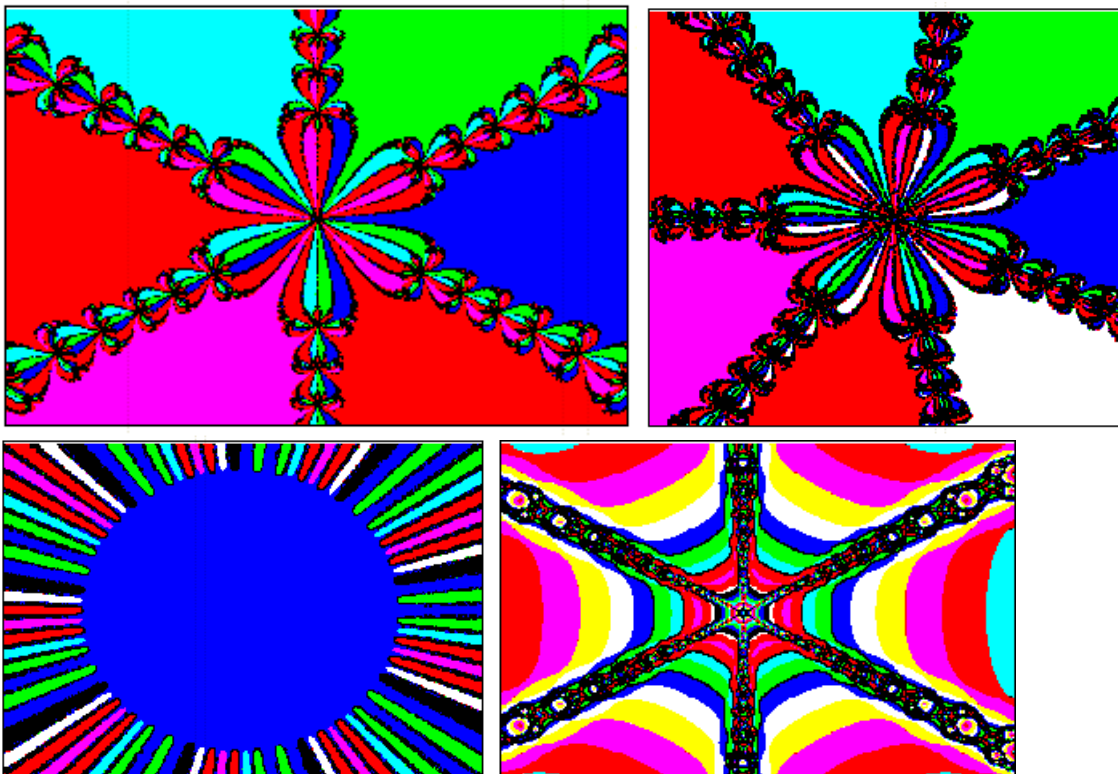


Diese GeoGebradatei zeigt die drei Einzugsgebiete der drei komplexen Einheitswurzeln C, D und E.

Zieht man S, den Startpunkt auf irgend eine Stelle des Bildschirms, ist Z der Bildpunkt unter der Newton-Iteration.

Dann zieht man S dahin, wo gerade Z war und kann so einen zweiten Schritt verfolgen.

Allerdings ist zu beachten, dass es sich nur um ein hinterlegte Bild handelt. Eine rechnerische Folgenerzeugung rann damit nicht ersetzt werden.



# Numerik Newtonverfahren zur Nullstellensuche Num - 3 -

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Oktober 02

## Schnittstellenberechnung:

Zur Berechnung von Schnittstellen zwischen  $g$  und  $h$  stellt man die

Gleichung  $g(x) = h(x)$  in die Form

$$g(x) - h(x) = 0 \text{ um und definiert}$$

$$f(x) := g(x) - h(x)$$

Für  $f$  hat man nun das **Nullstellenproblem**

**Gesucht ist**  $f(x) = 0$ .

Man bildet  $f'(x)$  und bildet die

**Newton-Rekursions-Trägerfunktion:**

$$\text{newton}(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ In der Nähe der gesuchten Nullstelle wählt man einen Startwert } x_0$$

und berechnet  $x_1$  gemäß  $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ . Oft ist  $x_1$  ein besserer Näherungswert für die

Nullstelle. Man wiederholt das Verfahren bis man die gewünschte Genauigkeit erreicht hat.

**Dieses Vorgehen bedeutet, dass man an der Stelle  $x_0$  die Tangente an  $f$  legt und deren Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse als bessere Näherung nimmt und so fort.**

In der Nähe von Waagenpunkten von  $f$ , wo also die Ableitung 0 ist, hat man sowohl beim *newton*-Term Probleme als auch bei den fast waagerechten Tangenten.

Wie bei anderen rekursiven Folgen kann man auch die **Newton-Rekursions-Trägerfunktion** betrachten. Man kann beweisen, dass sie (bis auf  $f'(x_0)=0$ ) die Winkelhalbierende waagrecht schneidet.

Man sagt dann: **Die Konvergenz ist superschnell,**

Genauer: die **Konvergenz ist quadratisch**, d.h. etwa: aus Fehler  $\epsilon$  wird beim nächsten Schritt Fehler  $\epsilon^2$ ,

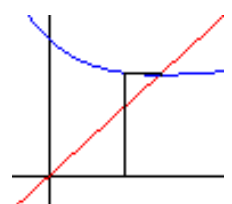
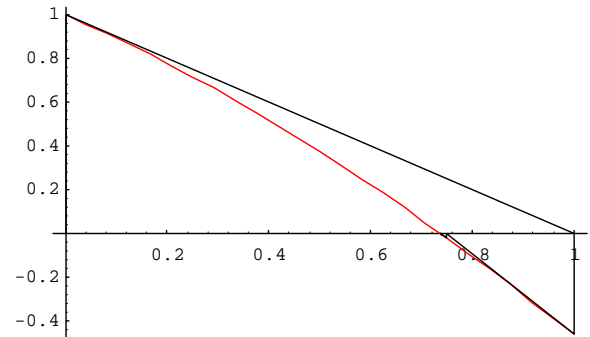
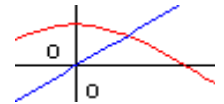
oder **pro Schritt verdoppelt sich etwa die Zahl der sicheren Ziffern.**

Newton={0.5 0.75522241710563642167170398834158450349745858253639869271285334427172208400  
0.73914166614987924494568092612508673520444264455845448716167392353102638131  
0.73908513392080680327769815993695210794467128819042706462837613657263764478  
0.73908513321516064176525915477954973896144783629268960706017590340220936485  
0.73908513321516064165531208767387340401608093347813677152781366545186010461  
0.73908513321516064165531208767387340401341175890075746496568063577328465488  
0.73908513321516064165531208767387340401341175890075746496568063577328465488

Die Konvergenzbedingung aus Formelsammlungen  $\left| \frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| < 1$  ist die übliche

Konvergenzbedingung für rekursive Folgen, hier geschrieben für  $f$ . Allenfalls theoretisch nützlich

Wo ist  $\cos(x)=x$ ?



## Theoretisches zur Konvergenz

### Konvergenzordnung

Konvergenz der Folge  $x_n$  gegen  $x_s$  der Ordnung  $p$  liegt vor, wenn der folgende Grenzwert weder 0 noch unendlich ist, sondern eine Zahl  $q$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x_s|}{|x_n - x_s|^p} = q < 1$$

Da  $x_n$  gegen  $x_s$  strebt, sind die Werte der Beträge kleiner 1.

Man kann überlegen:

Für  $p=1$  heißt dies, wenn der Zähler größer ist als der Nenner liegt gar keine Konvergenz vor.

Sonst kann der Bruch gegen  $0 < q < 1$  streben (dh. dann lineare Konvergenz) oder gegen 0.

Im letzteren Fall ist die Konvergenz besser als linear.

Wenn man  $p$  nun erhöht, wird der Wert des Bruches größer, also auch sein Grenzwert.

Wenn dieser Grenzwert dann unendlich ist, hat man zuviel erhöht.

Die Konvergenzordnung ist genau die größte Zahl, für die der Grenzwert noch ein fester endlicher Wert ist.

Das **Newtonverfahren** konvergiert **quadratisch, Konvergenzordnung 2**.

Das heißt, dass der folgende Quotient der Abstände von der wahren Nullstelle gegen eine

feste Zahl  $q$  konvergiert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x_s|}{|x_n - x_s|^2} = q < 1$$

Konkret heißt das etwa, dass sich die Zahl der sicheren Stellen von Schritt zu Schritt etwa verdoppelt.

Es gibt eine Vorhersage:

In erster Näherung ist

$$q = \frac{1}{2} \text{new}(x_s)'' \quad d.h. \quad |x_{n+1} - x_s| \approx \frac{1}{2} \text{new}(x_s)'' \cdot |x_n - x_s|^2$$

Im Beispiel gilt:

Dabei ist in der Mathematica-Syntax `newt[[k+1]] = newton(newton(k))`.

```
grenz=Table[(newt[[k+1]] - s) / (newt[[k]] - s)^2, {k, 1, 6}]
```

```
{0.282309372000441363016721584859331436630308428610391640253230803531520944129198712635338528528715
0.217090416798368567445490196252680750533791593698806341912829526114202101637128263187436672210925,
0.2207922989700754080864495312312898394474853854858130836826524012070629620944650501294901508,
0.2208053956891847706902700563081816462253055222604971646522472012 4964690329426156,...
```

Der Wert, den man mit der 2. Ableitung erhält:

```
new "[s]/2
```

```
0.220805395852664190548685550990066690589270536315349904825991350989977916
```

Das ist auf 6 Stellen genau.

Das heißt, der neue Abstand ist etwa 22% des Quadrates des alten Abstandes vom Grenzwert der Folge, mit der man die Nullstelle sucht.

## Gewöhnliche Differentialgleichungen DGL

Eine Gleichung mit mindestens einer Ableitung einer Funktion  $f$  und evt. der Funktion selbst und evt. der oder den Variablen  $x, \dots$  heißt **Differentialgleichung**.

Hängt  $f$  nur von **einer** Variablen ab, liegt eine **gewöhnliche DGL** vor, anderenfalls eine **partielle DGL**.

Die **Ordnung** einer DGL ist die höchste vorkommende Ableitungsordnung. Schreibt man  $y=f(x)$ , so kommt in vielen für die Anwendung wichtigen DGLn höchstens  $y''$ ,  $y'$  und  $x$  vor, also DGLn bis zur zweiten Ordnung.

Eine DGL der Bauart  $y''+a(x)y'+b(x)y=g(x)$  heißt **lineare DGL**.

Eine DGL der Bauart  $y''+ay'+by=g(x)$  heißt **lineare DGL mit konstanten**

**Koeffizienten**. Beide DGLn sind von zweiter Ordnung. Nur für diesen Typ ist das Lösen leicht. (S.u.)

Entsprechend sind  $y'+a(x)y=g(x)$  bzw.  $y'+ay=g(x)$  **lineare DGLn erster Ordnung**.

Die rechte Seite  $g(x)$  heißt dann **Störfunktion**,

Ist  $g(x)=0$ , heißt die lineare DGL **homogen**, anderenfalls heißt sie **inhomogen**.

DGLn, bei den Produkte aus  $y, y', \dots$  vorkommen\*, heißen DGLn höheren Grades. Der Grad der DGL ist die maximale Anzahl der  $y, y', \dots$  Faktoren in den Summanden.

$yy'+x^3 y^2=\sin(x)$  ist DGL 1. Ordnung und 2. Grades.

\* bei polynomialem Aufbau bzgl.  $y$

Bei nichtlinearen DGLn hat der Begriff homogen (leider) eine andere Bedeutung. Sie sind homogen, wenn jeder Summand denselben Grad hat.

Obige DGL ist homogen, ohne das Quadrat am  $y$  wäre sie inhomogen.

**Lösung einer DGL** ist eine Funktion, die beim Einsetzen in die DGL eine **wahre Aussage** entstehen läßt.

Gibt man eine einzige Lösung an, so heißt sie **partikuläre Lösung** oder **spezielle Lösung**.

Fasst man **alle möglichen** Lösungen zu einer Kurvenschar mit frei wählbaren Konstanten  $C_i$  zusammen, so hat man **die allgemeine Lösung der DGL** angegeben.

Nichtlineare DGLn haben manchmal noch zusätzlich sogenannte **singuläre Lösungen**, die sie nicht aus der allgemeinen Lösung durch Einsetzen von Werten für die Konstanten ergeben.

Die DGL 1. Ordnung lassen sich meist nach  $y'$  auflösen. Dann lassen sie sich gut darstellen und verstehen, denn sie beschreiben ein Richtungsfeld.

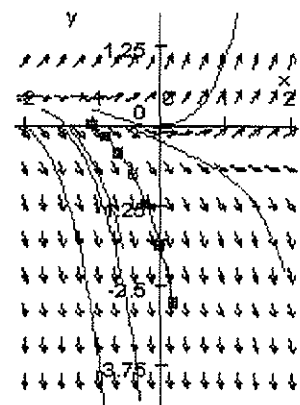
In diesem Fall kann man sie stets numerisch lösen. (Heun-Verfahren)

(Ausführlich in MuPAD siehe Internet)

```
dg1:=ode(y'(x)-2*y(x)=sin(x), y(x)); //DGL eintragen
```

```
solve(dg1)
```

$$\left\{ C_1 \cdot e^{2 \cdot x} - \frac{2 \cdot \sin(x)}{5} - \frac{\cos(x)}{5} \right\}$$



## Numerische Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung ist gegeben in der Form  $y' = g(x, y)$

mit der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$

Die numerischen Verfahren zur Beschaffung einer Lösung tasten sich - mit Hilfe der durch die DGL gegebenen Information über die Steigung - von  $P_0(x_0, y_0)$  vorwärts zu einem nächsten Punkt  $P_1(x_1, y_1)$ , dann zu  $P_2, P_3$  und so fort.

Der Fehler, den man dabei in Kauf nehmen muß, hängt natürlich von der Schrittweite  $h$  ab, mit der man von einem zum nächsten Punkt geht.

Ganz wesentlich ist aber auch das Verfahren, mit dem man arbeitet.

Im Zeitalter der rechnerischen Bewältigung mit Computern kann man ohne Probleme die Schrittweite  $h$  klein halten und dann ein weniger aufwendiges Verfahren wählen.

Die genaueren Verfahren bilden in mehr oder weniger aufwendiger Weise Mittelwerte aus Steigungen, die in der Nähe des gesuchten neuen Punktes dem durch die DGL gegebenen Richtungsfeld entsprechen. Bei den hier angesprochenen **Einschrittverfahren** geht in die Berechnung des nächsten Punktes allein der vorige Punkt ein. Die **Ordnung  $p$**  des Verfahrens gibt an, daß die Größenordnung des Fehlers bei der Angabe der Richtungen höchstens  $h^p$  ist.

§ **Eulerverfahren** = Runge-Kutta-Verfahren 1. Ordnung. Achtung: systematischer Fehler!!!

$$x_1 = x_0 + h, \quad y_1 = y_0 + h g(x_0, y_0)$$

$$x_2 = x_1 + h, \quad y_2 = y_1 + h g(x_1, y_1) \dots$$

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad y_{k+1} = y_k + h g(x_k, y_k)$$

§ **Verfahren von Heun** = Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung. Ein gutes Verfahren!

Der Punkt, der beim Eulerverfahren als neuer Punkt genommen wird, dient hier als Hilfspunkt  $P(x_1, z)$  zur Beschaffung einer Hilfssteigung  $m_z$ . Der neue Punkt wird dann mit dem Mittelwert zweier Steigungen bestimmt.

Nacheinander wird berechnet:

$$x_1 = x_0 + h, \quad m_o = g(x_0, y_0), \quad z = y_0 + h m_o$$

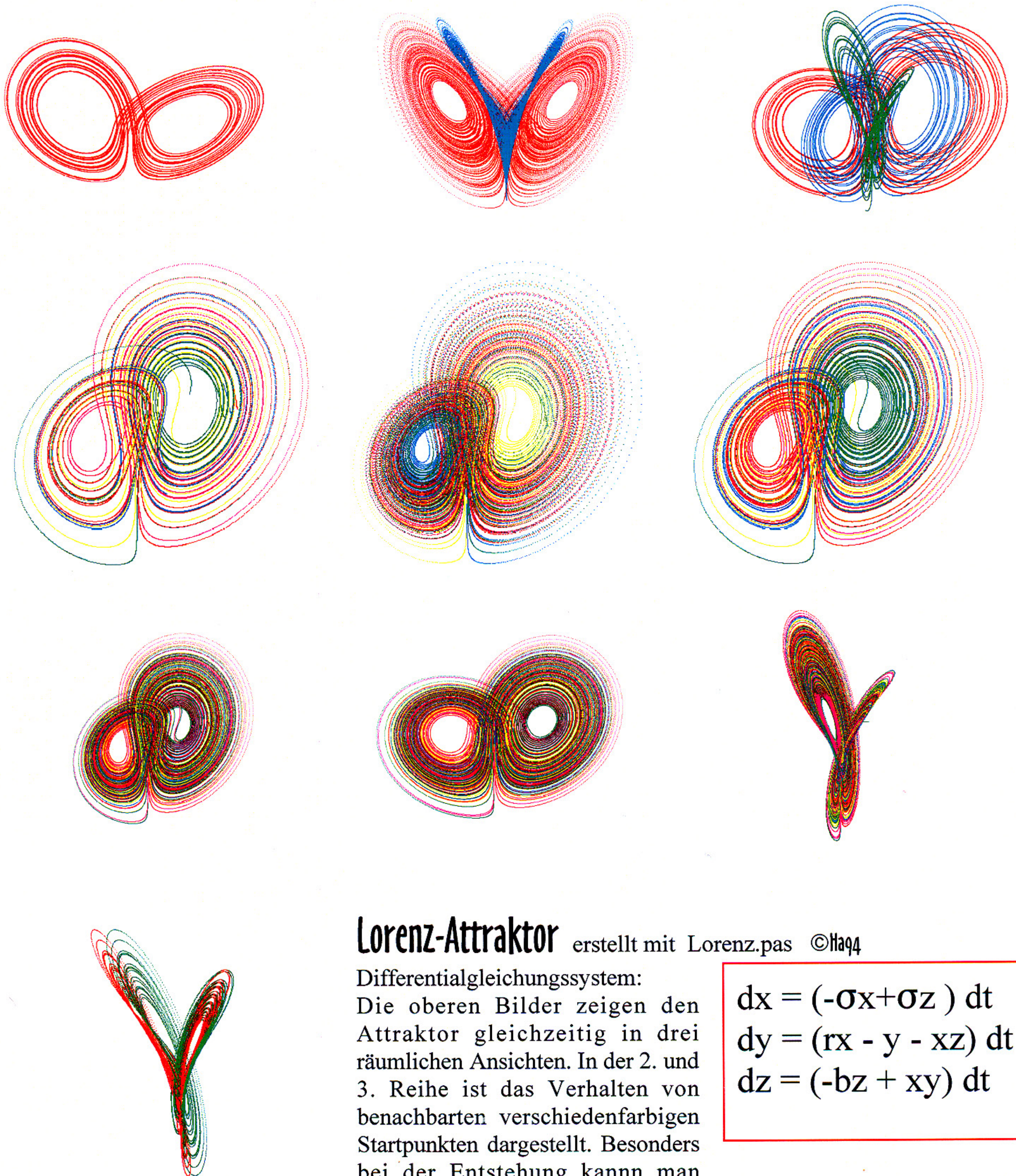
$$m_z = g(x_1, z), \quad y_1 = y_0 + h \frac{m_o + m_z}{2}, \quad x_2 = x_1 + h$$

$$, \quad m_1 = g(x_1, y_1), \quad z = y_1 + h m_1$$

$$m_z = g(x_2, z), \quad y_2 = y_1 + h \frac{m_1 + m_z}{2}$$

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad m_k = g(x_k, y_k), \quad z = y_k + h m_k$$

$$m_z = g(x_{k+1}, z), \quad y_{k+1} = y_k + h \frac{m_k + m_z}{2}$$



## Lorenz-Attraktor erstellt mit Lorenz.pas ©Haq4

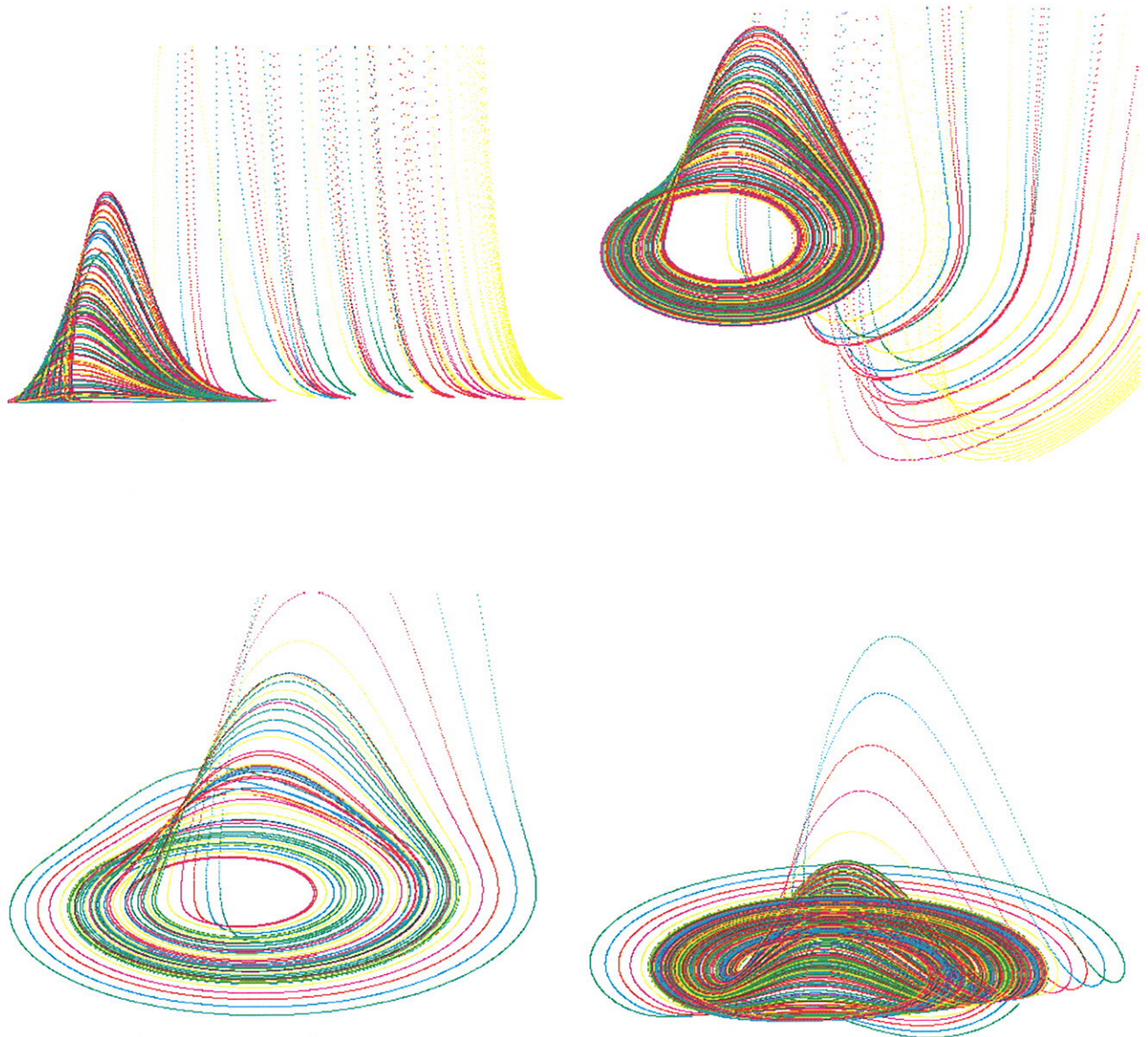
Differentialgleichungssystem:

Die oberen Bilder zeigen den Attraktor gleichzeitig in drei räumlichen Ansichten. In der 2. und 3. Reihe ist das Verhalten von benachbarten verschiedenfarbigen Startpunkten dargestellt. Besonders bei der Entstehung kann man

$$\begin{aligned} dx &= (-\sigma x + \sigma z) dt \\ dy &= (rx - y - xz) dt \\ dz &= (-bz + xy) dt \end{aligned}$$

sehen, wie sich die Bahnen der Nachbarnpunkte auseinanderentwickeln.

Insgesamt aber werden sie von der **Grenzfigur = Limesfigur = Attraktor** eingefangen, und je länger man beobachtet, desto dichter wird der Attraktor. In Wahrheit schneiden sich nie zwei verschiedene dieser Bahnen, was ein Bildschirm nicht wiedergibt. Auch eine einzelne Bahn hat keine Kreuzungspunkte



## Rössler-Attraktor erstellt mit Lorenz.pas ©Ha94

Differentialgleichungssystem:

Dargestellt ist das Verhalten von benachbarten verschiedenfarbigen Startpunkten. Besonders bei der Entstehung kann man sehen, wie sie die Bahnen der Nachbarpunkte auseinanderentwickeln. Insgesamt aber werden sie von der **Grenzfigur = Limesfigur = Attraktor** eingefangen. In Wahrheit schneiden sich nie zwei verschiedene dieser Bahnen, was ein Bildschirm nicht wiedergibt. Auch eine einzelne Bahn hat keine Kreuzungspunkte.

$$\begin{aligned} dx &= (-y-z) dt \\ dy &= (x+ay) dt \\ dz &= (b-cz+xz) dt \end{aligned}$$