

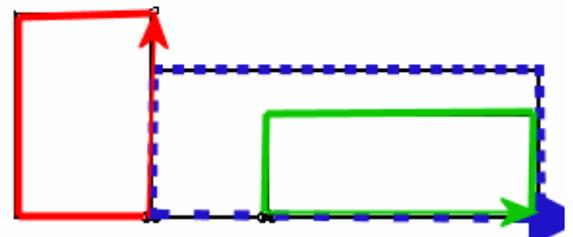
Dieses IFS-Fraktal habe ich

"Wald am See" genannt.

Es entsteht dadurch, dass zwei Abbildungen definiert werden und dann ein beliebiger Startpunkt mit diesen Abbildungen sehr oft abgebildet wird. Für das Wald-Fraktal wird das blaue, gestrichelte Rechteck auf das rote links oder auf das grüne rechts abgebildet. Die rote Abbildung bewirkt Verkleinerung und die Drehung nach links, das grüne Verkleinerung das Verrücken nach rechts.

Der "Wald" ist die Grenzfigur, der Limes, der Attraktor dieses Abbildungsduos. IFS ist die Abkürzung für "iterated functions". Die Form der Grenzfigur hängt allein von den Abbildungen ab, die man in dem von mir entwickelten Computerprogramm kreativ und frei wählen kann.

Dr. Dörte Haftendorn, Johanneum 1994, Uni Lüneburg 2005



Iteriertes Funktionensystem IFS, eindimensionaler Fall

Die Funktionen f_1 und f_2 mit

$$f_1(x) = \frac{x}{3} \text{ und } f_2(x) = \frac{x+2}{3}$$

werden auf das Intervall $[0,1]$ angewandt und bilden es auf zwei Intervalle der Länge $1/3$ ab.

Nun wird "iteriert", also die Ergebnis-Intervalle auf die x-Achse gelegt und "wiederum= iterum" abgebildet.

Beim ersten Schritt ist aus dem Startintervall das mittlere Drittel herausgenommen worden.

Beim jedem weiteren Schritt werden aus den verbliebenen Resten die mittleren Drittel entfernt.

Georg Cantor, 1845-1918 gilt als der "Begründer" der Mengenlehre und der "transfiniten Zahlen".

Der Cantor-Staub ist ein Beispiel einer total unzusammenhängenden Menge ohne isolierte Punkte.

Im Dufner-Programm "Fraktale" in "FraktaleJulia" zeigt die blaue Senkrechte, die man verschieben kann, die dezimale und triadische Entwicklung der Stelle, an der die Senkrechte steht. Aus der triadischen Entwicklung einer Zahl kann man ablesen, in welchen Teilintervallen sie bei der Konstruktion der Cantor-Menge liegt.

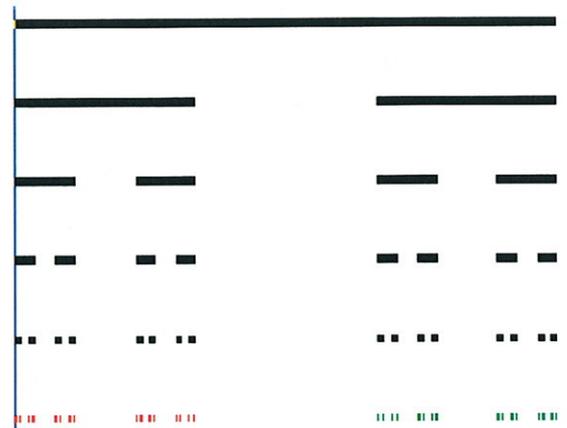
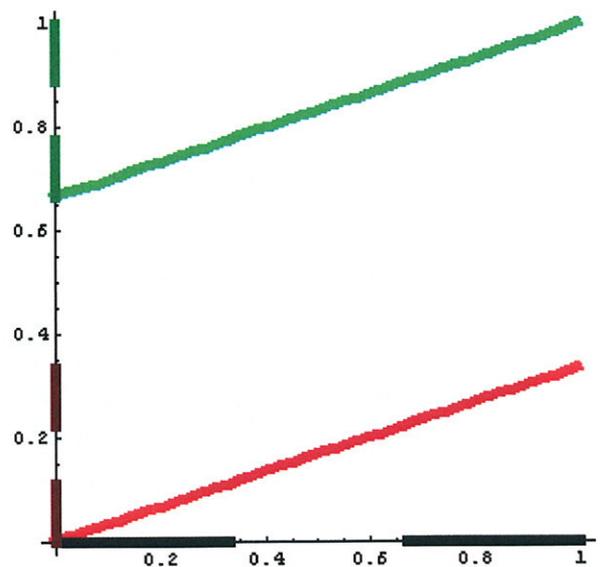
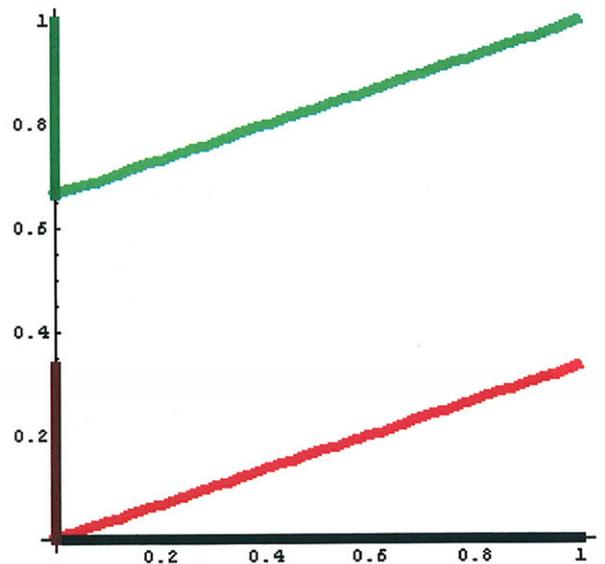
Beispielsweise liegen alle Punkte, deren triadische Entwicklung mit 0,2... beginnt, im rechten Drittel von $[0,1]$. Erkunden Sie die Zusammenhänge, lesen Sie die "Hilfe".

Man kann zeigen, dass der Cantor-Staub genau aus den Zahlen besteht, deren triadische Darstellung nur 2 und 0, keine 1 ausweist. Dabei ist allerdings zu beachten, dass

$$1 = 0,222222222\dots = 0,\bar{2} \text{ ist.}$$

Wenn man nun noch alle 2 durch 1 ersetzt, hat man Dualzahlen und zwar sämtliche zwischen 0 und 1. Damit ist gezeigt, dass der Cantor-Staub nicht nur unendlich viele Punkte enthält, sondern "überabzählbar unendlich viele", also dass er die Mächtigkeit des gesamten Intervalles $[0,1]$, "des Kontinuums", hat.

Literatur: Dufner, Roser, Unseld: Fraktale und Juliamengen [mit CD], Verlag Harri Deutsch,



Affine Abbildungen aus 3 gut gewählten Punktpaaren

Affine Abbildungen, allgemein Ka 20/11
 OBD A vereinfacht

definiert in Cindrella durch drei Punkte A, B, C und ihre Bilder.

Typ 1 $A=(0,0)$ $B=(5,0)$ $C=(0,5)$
 $\downarrow d$ $\downarrow e$ $\downarrow f$

Allgemein $p' = Tp + t$ $\rightarrow p' = Tp + d$
 $d = a' = T(0) + t = t$

$$e = Tb + d = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + d$$

$$e = 5 \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix} + d$$

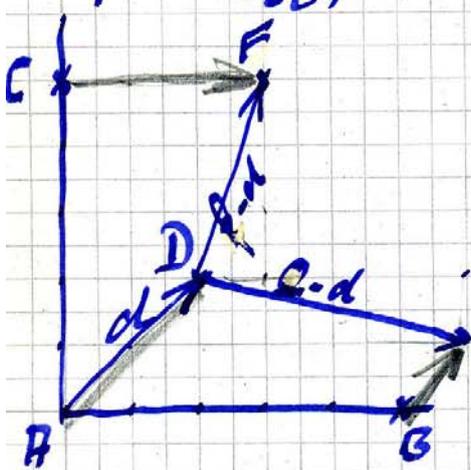
$$t_{11} = \frac{1}{5}(e_x - d_x)$$

$$t_{12} = \frac{1}{5}(e_y - d_y)$$

$$f = 5 \begin{pmatrix} t_{21} \\ t_{22} \end{pmatrix} + d$$

$$t_{21} = \frac{1}{5}(f_x - d_x)$$

$$t_{22} = \frac{1}{5}(f_y - d_y)$$



$$p' = \frac{1}{5}(e-d, f-d) + d$$

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e_x - d_x & f_x - d_x \\ e_y - d_y & f_y - d_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

hier $p' = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Typ 2 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ beliebig
 siehe am folgenden Blatt v. 5.5.2010

Mit der Bezeichnung 6/7 und 7/7

Affine Abbildungen aus 3 gut gewählten Punktpaaren

2/7

$$p' = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fixpunkt Ansatz $p = f(p) = Tp + t$

$$p = Tp + t$$

$$p - Tp = t$$

$$\rightarrow (E - T)p = t$$

$$p = (E - T)^{-1} t \quad \text{falls das Inverse existiert}$$

Gleichungssystem

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right) p = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad | \cdot 5$$

$$\begin{pmatrix} 5-4 & 0-1 \\ 0+1 & 5-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} p_x & -p_y & = & 10 \\ p_x & +2p_y & = & 10 \\ 0 & 3p_y & = & 0 \end{matrix}$$

$$p_x + 2p_y = 10$$

$$0 + 3p_y = 0$$

$$p_y = 0$$

$$p_x = 10$$

$$p_{\text{Fix}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgaben

Ist dies eine

Drehstauchung?

Def: gleichsinnige affine

Abb. $\Leftrightarrow \det T > 0$

gegensinnig $\Leftrightarrow \det T < 0$

entartet $\Leftrightarrow \det T = 0$

Behandeln Sie ebenso

$$A \rightarrow D = (-2, 3)$$

$$B \rightarrow E = (-3, 7)$$

$$C \rightarrow F = (-6, -1)$$

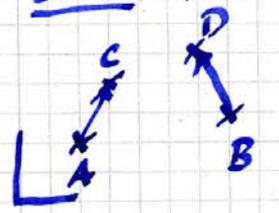
und

$$\begin{matrix} D = (-2, -2) \\ E = (-2, 5) \\ F = (-9, 4) \end{matrix}$$

Ähnlichkeitsabbildungen aus 2 gut gewählten Punktpaaren 3/7

Ähnlichkeitsabbildung Kla 2011

definiert in Cindemla durch zwei Punkte und ihre Bilder



Mit diesen Angaben kann man nur gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildungen definieren, das sind

die Drehstaudungen und Verschiebungen und deren Verknüpfungen.

Das führt auf die Idee, die Ebene als Gaußsche Zahlenebene aufzufassen und komplex zu rechnen:

$$z' = w \cdot z + t \quad \text{mit } w = k e^{i\alpha}$$

- 3. Verschiebung um t
- 1. Drehung um α
- 2. Staudungsfaktor $k \leq 1$ (bei JF i.A. nötig)

Zusammenhang mit

$$z' = Tz + t \quad \text{obdA Sei } t=0 \text{ zunächst}$$

$$w = w_x + i w_y \quad z = x + i y$$

$$wz = (w_x + i w_y)(x + i y) = w_x x - w_y y + i(w_x y + w_y x)$$

$$wz = \begin{pmatrix} w_x & -w_y \\ w_y & w_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

also $w_x = k \cos \alpha$
 $w_y = k \sin \alpha$

$$z' = k \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Passet auch zur Eulerformel

Drehstaudung in lin. Alg.

$$w = k e^{i\alpha} = k \cos \alpha + i k \sin \alpha = w_x + i w_y$$

Allgemein $z' = w z + t$

Ähnlichkeitsabbildungen aus 2 beliebigen Punktpaaren 4/7

Ähnlichkeit, Gleichung

Spez. Drehstauchung gefolgt von Verschiebung

aus $A \rightarrow C$
 $B \rightarrow D$ $z' = w z + t$

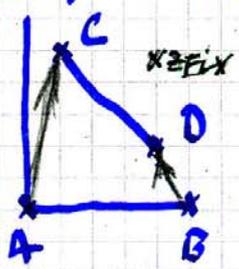
$C = w a + t$
 $D = w b + t$ w und t sind gesucht

$C - D = w(a - b)$ $w = \frac{C - D}{a - b}$ $a \neq b$ trivial
 $t = C - w a = C - \frac{C - D}{a - b} a$

$t = \frac{C a - C b - C a + D a}{a - b}$

$t = \frac{D a - C b}{a - b} = \frac{\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}{a - b}$ $\left| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right| = \det$

Beispiel $a = 0$ $b = 5$ $c = 1 + 5i$



$a - b = -5$ $d = 4 + 2i$
 $C - D = -3 + 3i$

$w = \frac{-3 + 3i}{-5} = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}i = k e^{i\alpha}$

$t = \frac{0 - (1 + 5i)(4 + 2i)}{-5} = \frac{1}{5}(-6 + 22i)$

Drehung um 45°
 Stauchung $k = \frac{3}{5}\sqrt{2}$
 $\cos \alpha = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3 \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$
 $\alpha = 45^\circ$

Fixpunkt? $z' = \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}i\right) z + \frac{1}{5}(-6 + 22i) = f(z)$

$z = f(z)$
 $z = w z + t$

$(1 - w)z = t$
 Fixpkt $z = \frac{t}{1 - w} = \frac{-6 + 22i}{5(1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{5}i)} = z_{fix}$

$z_{fix} = \frac{-6 + 22i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} = \frac{-12 + 66 + i(18 + 44)}{4 + 9}$
 $= \frac{1}{13}(54 + 62i) = \frac{54}{13} + \frac{62}{13}i$
 $w \cdot \bar{w} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2$
 $|w| = \frac{3}{5}\sqrt{2} =: k$ Stauchfaktor

$\frac{\sqrt{2} \cdot 0}{13} = \frac{3}{5}\sqrt{2}$ $\approx 0,84$ elementar geometrisch

Fixpunkt bei Ähnlichkeitsabbildungen in der komplexen Ebene

5/7

Der Fixpunkt von $z' = wz + t$
 ist Drehzentrum

$$z' = wz + t$$

$$z' = w(z - m) + m \quad \text{Drehung um } m$$

$$= wz - wm + m \quad \text{Drehstandung um } m$$

Vergleich

$$m - wm = t$$

$$(E - w)m = t$$

$$(E - w)z = t \quad \text{Ward der Fixpunkt}$$

gleiches.

Das passt dazu: jede Drehung bzw. Dreh-
 standung hat
 genau einen Fixpunkt

und das Drehzentrum ist Fixpunkt

Wahr folgt Verschiebung \circ Drehung
 = Drehung

oder: es gibt keine "gleit drehung"

Affine Abbildungen 2D, allgemeine Abbildungsgleichung

6/7



Alg. Affine Abbildung

$$A \rightarrow D$$

$$B \rightarrow E$$

$$C \rightarrow F$$

$$\begin{aligned} a = 0 & & d = d_x + i d_y \\ b = 10 & & e = e_x + i e_y \\ c = 10i & & f = f_x + i f_y \end{aligned}$$

Als affine Abb.

$$p' = T p + t = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix}$$

$$d = T a + t \quad \Rightarrow \quad d = t$$

$$e = T b + t$$

$$e = T b + d$$

$$f = T c + t$$

$$f = T c + d$$

Vektor-
gleichungen

$$e_x = t_{11} b_x + t_{12} b_y + d_x$$

$$e_y = t_{21} b_x + t_{22} b_y + d_y$$

$$f_x = t_{11} c_x + t_{12} c_y + d_x$$

$$f_y = t_{21} c_x + t_{22} c_y + d_y$$

4 Variable, T

$$(e_x c_x - f_x b_x) = t_{12} (b_y c_x - c_y b_x) + d_x c_x - d_x b_x$$

$$\frac{(e_x - d_x) c_x - (f_x - d_x) b_x}{b_y c_x - c_y b_x} = t_{12}$$

$$e_y c_x - f_y b_x = t_{22} (b_y c_x - c_y b_x) + d_y c_x - d_x b_x$$

$$t_{22} = \frac{(e_y - d_y) c_x - (f_y - d_y) b_x}{b_y c_x - c_y b_x} = \frac{\begin{vmatrix} c_x & b_x \\ c_y & b_y \end{vmatrix}}{-\det}$$

$$e_x c_y - f_x b_y = t_{11} (b_x c_y - c_x b_y) + d_x c_y - d_x b_y$$

$$t_{11} = \frac{(e_x - d_x) c_y - (f_x - d_x) b_y}{b_x c_y - c_x b_y}$$

$$t_{21} = \frac{(e_y - d_y) c_y - (f_y - d_y) b_y}{b_x c_y - c_x b_y}$$

$$\begin{vmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{vmatrix} = \det$$

$$\begin{vmatrix} e_x - d_x & c_x \\ f_x - d_x & b_x \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{-\det} = t_{12}$$

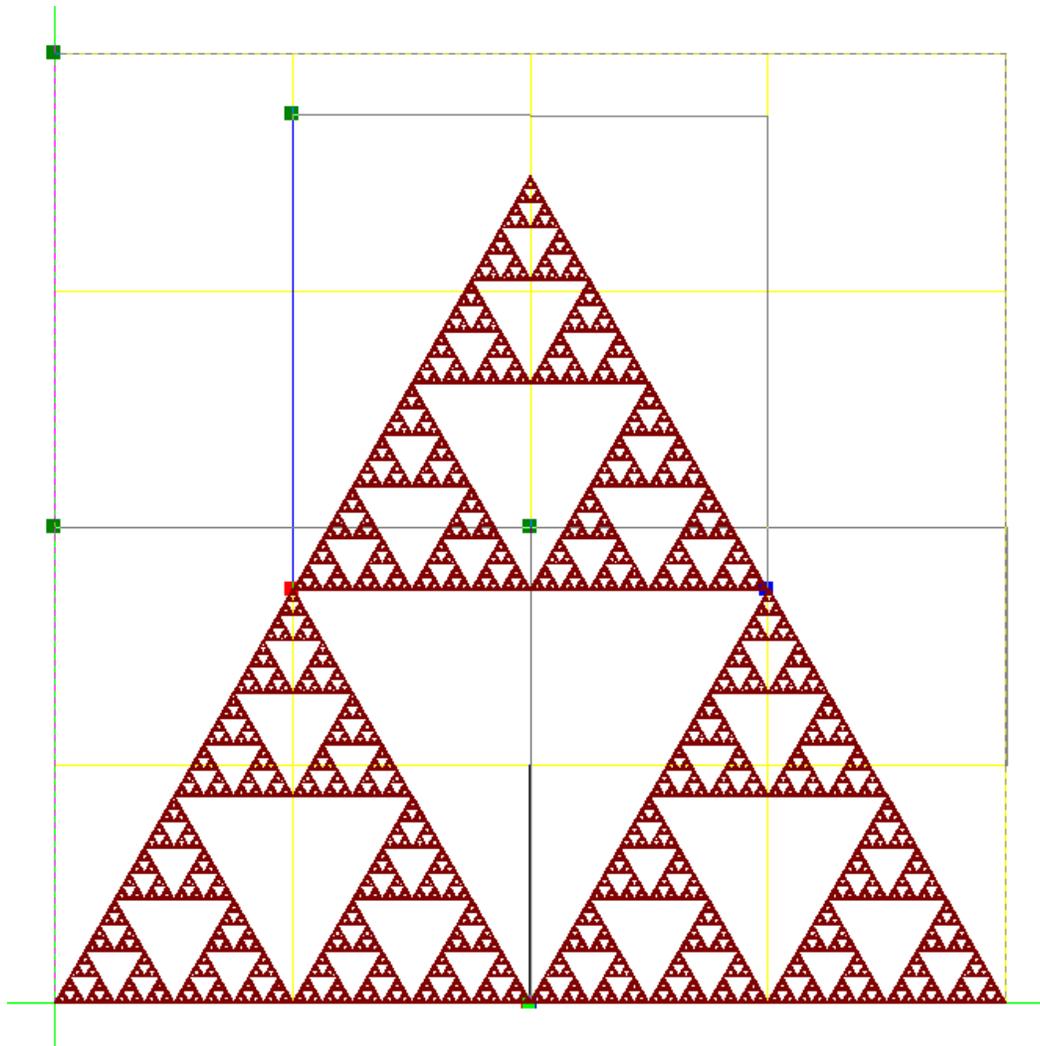
$$\begin{vmatrix} e_y - d_y & c_x \\ f_y - d_y & b_x \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{-\det} = t_{12}$$

$$\begin{vmatrix} e_x - d_x & c_y \\ f_x - d_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\det} = t_{11}$$

$$\begin{vmatrix} e_y - d_y & c_y \\ f_y - d_y & b_y \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\det} = t_{21}$$

Mit der Software der Dufner-Buch-CD erstelltes Sierpinski-Dreieck

Dufner,...:Fraktale und Juliamengen,ISBN 3-8171-1564-4



Erklärung: Urbild ist das große Quadrat aus 16 kleinen Quadraten. Der Ursprung ist links unten. Der oberste grüne Punkt hat die Koordinaten $(1,0)$.

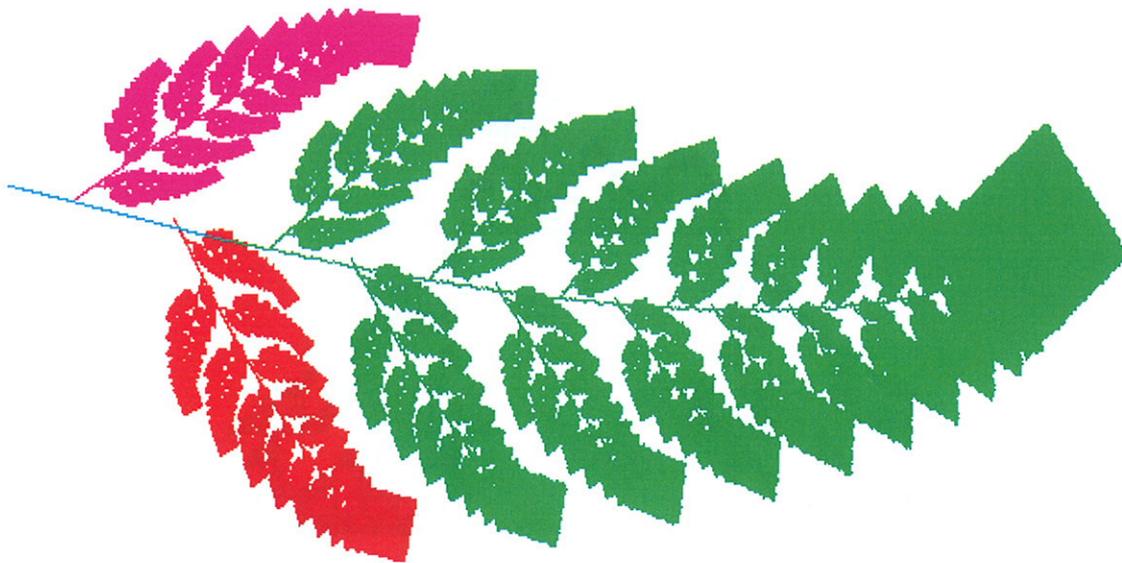
Drei Abbildungen sind durch drei auf halbe Länge verkleinerte Quadrate

gekennzeichnet. Sie bilden den Ursprung auf $(0,0)$, auf $(0.5/0)$ und auf $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\sqrt{3})$

ab. Letzteres ist nötig, damit das obere Dreieck genau an der Spitze des linken anfängt. So ist die "Geometrie" des Sierpinski-Dreiecks genau erfasst.

Wer den geometrischen Aufbau eines IFS-Fraktals erfasst, hat auch die Abbildungen.

Lohnende Experimente: Was passiert, wenn man den Ursprungs-Bildpunkt der letzten Abbildung nicht genau platziert? Was ist, wenn man anders als auf die Hälfte verkleinert?



Hutchinsonoperator des Barnsleyfarns

10 mal angewendet. Ausgangsbild war der volle Bildschirm. Auf ihn werden alle Abbildungen des IFS **gemeinsam** angewendet. Diese Gesamtabbildung heißt "Hutchinsonoperator."

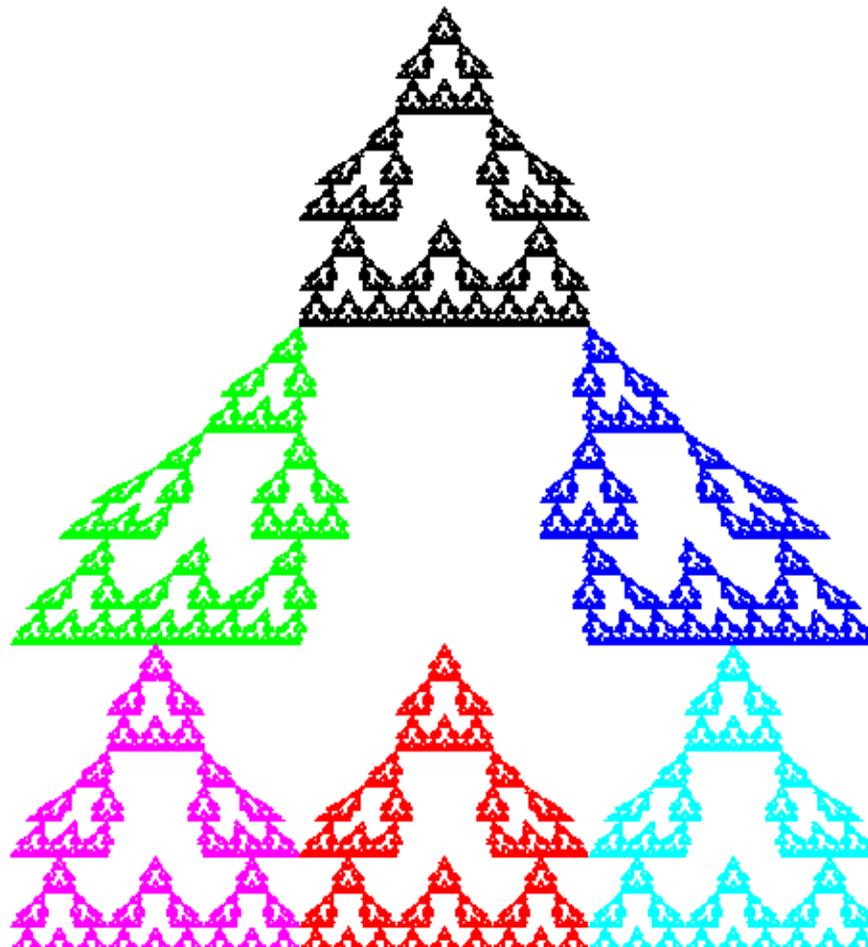
Ein Durchgang dauerte 1995 zuerst etwa 25 Sekunden, dann immer weniger, bis zum Farn-Attraktor, dessen Abbildung 14 Sekunden gedauert hat. 2005 waren das für alle 10 Anwendungen des Hutchinson-operators 40 Sekunden.

farnvoll.wpg

Mit 40-maliger Anwendung ist die "dicke Spitze" auf 1 Pixel zusammengeschrumpft. Das kann man auch vorher ausrechnen: Der größte der Stauchfaktoren im IFS ist 0,85 , 640 Pixel war der Bildschirm breit, $640 \cdot 0,85^n = 1$ hat die Lösung $n=40$.

Fazit: jedes beliebige Bild landet mit dem Hutchinson-Operators des Farns auf dem Farn.





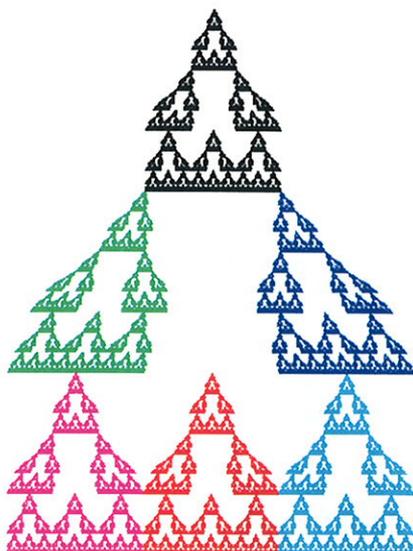
Dies ist meine **Pagode**, eine Verwandte des Sierpinski-Dreiecks.

Das zugehörige IFS, (Iteriertes Funktionen-System) hat ersichtlich sechs Abbildungen. Obwohl die beiden mittleren Abbildungen keine Ähnlichkeitsabbildungen sind, ist die fraktale Selbstähnlichkeits-Dimension d wohl dennoch sinnvoll zu berechnen mit

$$d = \frac{\ln N}{\ln k} = \frac{\ln 6}{\ln 3} = 1,63$$

mit N =Zahl der Abbildungen=Zahl der "Bausteine",
und k = Streckfaktor vom Baustein auf das ganze Fraktal.

Dies ist pagode.txt Ha März 95



Dies ist meine Pagode. Entwerfen Sie ein Ausgangsrechteck und als Parallelogramme die nötige Anzahl von affinen Abbildungen. Zeichnen Sie in das Bild. Dieses Bild sei 9 Einheiten breit und 12 Einheiten hoch. Schreiben Sie die Gleichung der Abbildung auf, die die ganze Pagode auf die oberste dieser 6 Pagoden abbildet.

Eine dieser Gleichungen ist: (selber bestimmen!)

Markieren Sie einen Punkt P und bilden Sie ihn mit dieser Gleichung ab. Zeichnen Sie den Bildpunkt ein.

Die Pagode ist nicht streng selbstähnlich. Woran sieht man das?

Bestimmen Sie dennoch die Selbstähnlichkeits-Dimension d .

Aufgabe 3, die zum Thema **Iterationen** gehört.

Statt der Ihnen bekannten logistischen Parabel sehen Sie rechts den sog. "Sägezahn" und die Winkelhalbierende Wh.

Man startet bei x_0 und zeichnet abwechselnd zu Wh und zur Sägezahnkurve.

Die Formel ist $x_{n+1} = 2x_n \text{ modulo } 1$, dh. man verdoppelt x und läßt stets weg, was vor dem Komma entsteht.

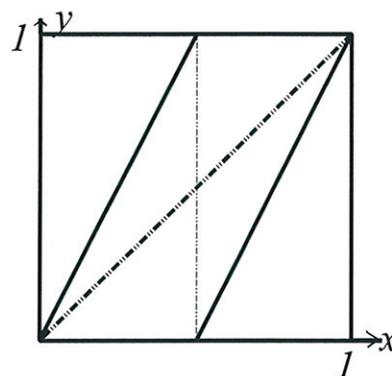
a) Verfolgen Sie rechnerisch 7 Schritte weit, was aus 0,7 bzw. 0,11 wird.

0,7 ...

0,11....

Verfolgen Sie ähnliche Anfangswerte auch zeichnerisch (Verwenden Sie Farben).

b) Wählen Sie eng benachbarte Werte, deren Bahnen sehr bald auseinanderlaufen. Erläutern Sie an diesem Beispiel die Ihnen bekannte **Chaos-Definition**.



Aufgabe 4, in der das **Apfelmännchen** vorkommt.

a) Zeichnen Sie ein komplexes Koordinatenkreuz mit der Einheit 5 cm und verfolgen Sie zeichnerisch und rechnerisch die Folge $z_{n+1} = z_n^2 + c$ für $c = 0,3 + 0,6i$ und $z_0 = 0$ drei Schritte weit.

(Lösung: $\{0, 0.3 + 0.6i, 0.03 + 0.96i, -0.6207 + 0.6576i, 0.252831 - 0.216345i, 0.317118 + 0.490603i\}$)

b) Bei welchem weiteren Verhalten der entstehenden Folge würde man c auf dem Computerbildschirm schwarz färben, bei welchem farbig?

c) Wie erhält man die Juliamenge zu obigem c ?

Lösen Sie Fixpunktgleichung $z = z^2 + c$ mit diesem c . Bestätigen Sie, dass $\{z_1 = -0.025395 + 0.570999i, z_2 = 1.02539 - 0.570999i\}$ Lösungen sind (den ersten rechnerisch, den zweiten zeichnerisch).

Arnold's Katze

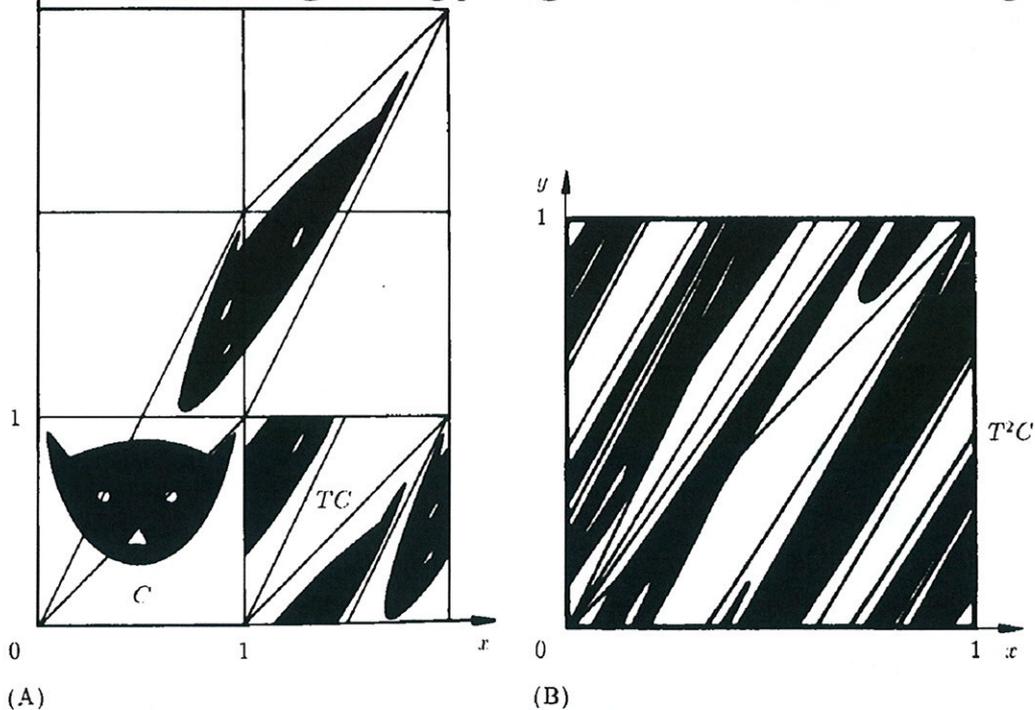


Abb. 11.12. (A) Arnoldsche Katzen-Abbildung; (B) Iterierte Katzen-Abbildung.

"Arnolds Katze" ist oben links unten zu sehen. Sie wird mit der affinen Abbildung T verzerrt. Die Quadrate, in die das verzerrte Bild reicht, werden übereinander kopiert und ergeben das nächste Bild. Es ist neben "Arnolds Katze" zu sehen.

Nun wird dieser Vorgang oft wiederholt. Da wird das Bild immer mehr "verruht".

Es ist daher völlig verblüffend, dass nach etlichen Iterationen der Katzenkopf unversehrt wieder auftaucht.

Schroeder Fraktale,... S 272-274

Eigene Mathematica-Notebooks

arnoldsKatze1.nb

Grundlagen, Modulo 10

arnoldsKatze2.nb

Probleme mit Nicht-Raster punkten

Weiterführungen,

Untersuchungen für andere Moduln

Handrechnungen und

Beweisüberlegungen

Eigenvektoren

Zyklen

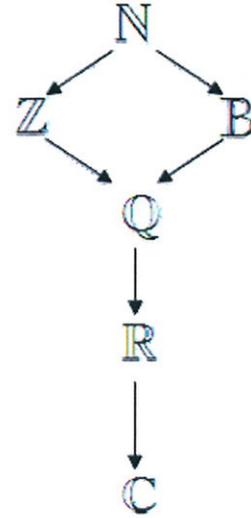
Anpassung an übliche Darstellung

Vortrag: Bigalke (Wingst 1994)

Dr. Dörte Haftendorn Johanneum Juli 1997

Komplexe Zahlen und Funktionen

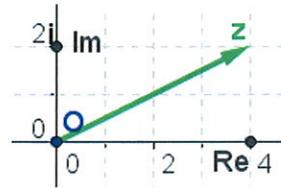
Die Erweiterung von den reellen Zahlen \mathbb{R} zu den komplexen \mathbb{C} ordnet sich bei den algebraischen Erweiterungen ein und ist auf der Seite "[Aufbau des Zahlensystems](#)" beschrieben. Die wesentlichen Definitionen stehen aber auch auf dieser Seite bei "[Rechnen](#)".



Gaußsche Zahlenebene Rechnen + - * :	Eulersche Formel, Polardarstellung * : :	Komplexe Inversion durch geometrische Inversion am Kreis
Riemannsche Zahlenkugel	n-te Einheitswurzeln	Komplexe Funktionen Riemannsche Flächen Quadrat-Fkt., Wurzel-Fkt, Ln-Fkt, E-Fkt
Mandelbrot-Iteration Apfelmännchen	Newtonverfahren komplex	

Gaußsche Zahlenebene, Rechnen + - * :

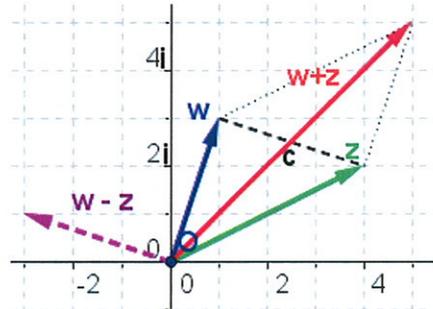
Darstellung In der Gaußschen Zahlenebene haben die komplexen Zahlen die Gestalt $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dabei heißt a der Realteil von z, $Re(z)$ und b der Imaginärteil von z $Im(z)$. Der reelle Zahlenstrahl heißt nun "reelle Achse", die senkrechte Achse enthält alle reelle Zahlen versehen mit dem Faktor i, wobei $i^2 = -1$ ist.



Strichrechnung Die Addition erfolgt in der Gaußschen Zahlenebene entsprechend der Vektoraddition, ebenso die Subtraktion

$$z + w = (a + ib) + (u + iv) = (a + u) + i(b + v)$$

$$z - w = (a + ib) - (u + iv) = (a - u) + i(b - v)$$



Multiplikation Die Multiplikation ist algebraisch passend definiert:
 $z \cdot w = (a + ib) \cdot (u + iv) = au - bv + i(av + bu)$

Visualisierung: [Komplexe Zahlen, Summe und Produkt](#)

Division

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

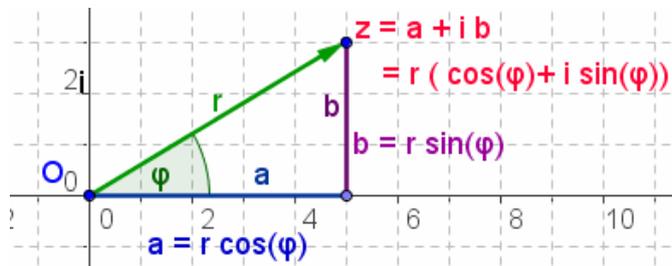
Diese Umrechnung ist wichtig, damit auch das Inverse die üblich Darstellung $x + iy$ bekommt. Ein tieferes Verständnis des Inversen gewinnt man erst mit der

Polardarstellung und der Inversion am Kreis.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein vollständiger Körper, der sich aber nicht anordnen lässt.

Polardarstellung und Eulersche Formel

Darstellung



Taylorreihen

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} + O(t^8)$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040} + O(t^9)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + \frac{t^6}{720} + \frac{t^7}{5040} + O(t^8)$$

Sieht man sich die Taylorreihen von cos, sin und e an, dann erkennt man die strukturelle Gleichheit. Die e-Funktion ergibt sich nicht als Summe, da stimmen die Vorzeichen nicht. Nimmt man aber nicht t als Argument der e-Funktion sondern it, so passt es:

$$e^{i \cdot t} = 1 + i \cdot t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3 \cdot i}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{i \cdot t^5}{120} - \frac{t^6}{720} - \frac{t^7 \cdot i}{5040} + O(t^8)$$

Eulersche Formel
Polardarstellung

Also gilt die **Eulersche Formel**

$$e^{i \varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

und für komplexe Zahlen gilt die Polardarstellung:

$$z = r e^{i \varphi} = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

r heißt Betrag von z und phi heißt Argument von z, oder (Argument)-Winkel von z

Multiplikation

Quadrat bilden:
Winkel verdoppeln, Betrag quadrieren

$$z^2 = (r e^{i \varphi})^2 = r^2 e^{i 2\varphi}$$

Produkt bilden:
Beträge multiplizieren, Winkel addieren

$$z \cdot w = (r e^{i \varphi}) \cdot (\rho e^{i \psi}) = r \rho e^{i(\varphi + \psi)}$$

[Visualisierung des Produktes](#)

[Geometrische Erzeugung des Produktes](#)

Division

Inverses bilden:
Kehrwert des Betrages und Negatives des Winkels nehmen:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r e^{i \varphi}} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i \varphi}$$

Quotient bilden:

Quotient der Beträge und Differenz der Winkel nehmen:
$$\frac{z}{w} = \frac{r e^{i\varphi}}{\rho e^{i\psi}} = \frac{r}{\rho} \cdot e^{i(\varphi-\psi)}$$

Geometrische Erzeugung des Inversen mit Strahlensatz

[Komplexe Zahlen, Inverses geometrisch mit Strahlensatz](#)   *99b

Geometrische Erzeugung des Inversen mit Inversion am Kreis

[Komplexe Zahlen, Inverses geometrisch mit Inversion am Kreis](#)   *99b

[Weiteres zur Inversion](#)

[Algebra] [Aufbau des Zahlensystems] [Analysis] [Geschichte] [Riemann] [MuPAD] [GeoGebra] [Didaktik]

Inhalt und Webbetreuung ©Prof. Dr. Dörte Haftendorn  Nov 2006, update 05. Mai 2008

MATHEMATIK-VERSTEHEN
www.mathematik-verstehen.de

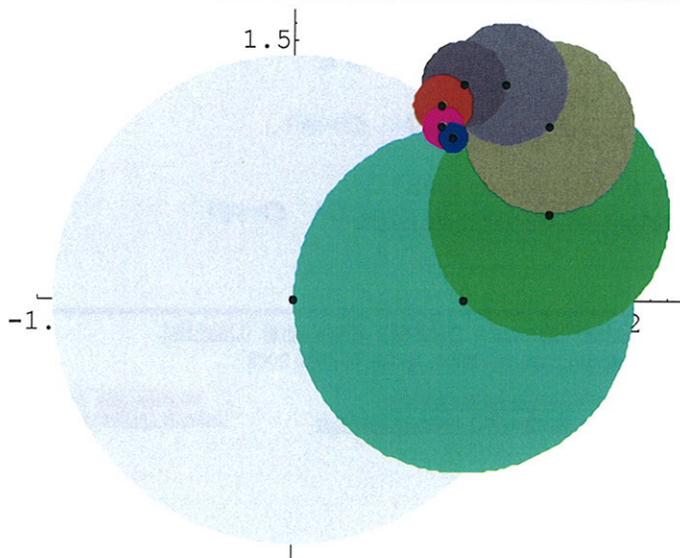
www.leuphana.de/matheomnibus
<http://haftendorn.uni-lueneburg.de>

www.doerte-haftendorn.de
<http://mathematik.uni-lueneburg.de>

Mathematik und
Didaktik der Mathematik

Fraktale Schnecken

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 3. Juli 2003



$$f[z_] := a z + b$$

$$a = \frac{1}{2} (1 + I); b = 1;$$

`NestList[f, 0, 8]`

$$\left\{ 0, 1, \frac{3}{2} + \frac{i}{2}, \frac{3}{2} + i, \frac{5}{4} + \frac{5i}{4}, 1 + \frac{5i}{4}, \frac{7}{8} + \frac{9i}{8}, \frac{7}{8} + i, \frac{15}{16} + \frac{15i}{16} \right\}$$

Pi/4 Kreise gefüllt

$$d[\alpha_] := \begin{pmatrix} \cos[\alpha] & -\sin[\alpha] \\ \sin[\alpha] & \cos[\alpha] \end{pmatrix}$$

$$z[k_] := \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$\text{bild}[p_] := (z[k].d[\alpha].p + c) // \text{Flat}$$

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{10}; k = 0.935; c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

`li =`

`{NestList[bild, p // Flatten, 50]}`

