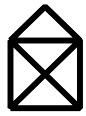
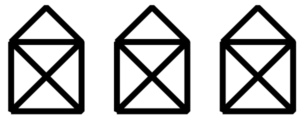
Fraktale Dimension: Grundüberlegung am Nikolaushaus

Prof. Dr. Dörte Haftendorn www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt 14. November 1996, Apr. 2005

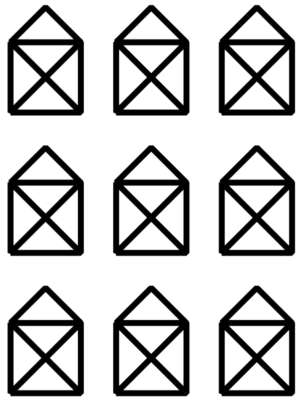
Das ist das Haus
vom Nikolaus.
Es hat eine Weglänge von etwa 17 cm,
einen Flächeninhalt von 5 cm².



Das sind drei Häuser
vom Nikolaus.
Sie sind untereinander kongruent.
Sie haben eine Weglänge von etwa 3 mal 17 cm, also 51 cm,
und einen Flächeninhalt von $3 \cdot 5$ cm².

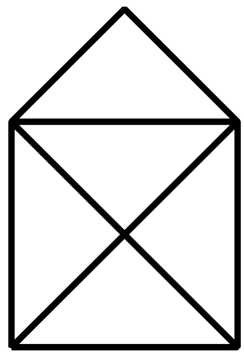


Das sind $z = 9$ Häuser
vom Nikolaus.
Sie sind untereinander kongruent.
Sie haben eine Weglänge von etwa $z \cdot 17$ cm, also 153 cm,
und einen Flächeninhalt von $z \cdot 5$ cm², also 45 cm².



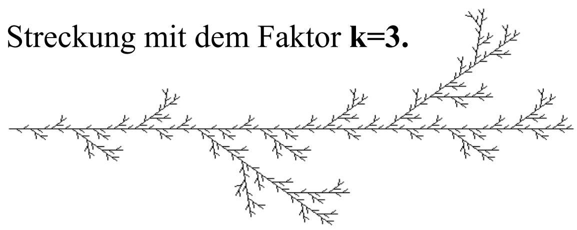
z Häuser haben z-fache Länge
z-fache Fläche
z-faches Volumen

Das ist das dreifach so breite Haus
vom Nikolaus.
Es ist den kleinen Häusern ähnlich, Streckfaktor **k=3.**
Es hat eine Weglänge von etwa k 17 cm, also 51 cm,
eine Breite von $k \cdot 2$ cm, also 6 cm
und einen Flächeninhalt von $k^2 \cdot 5$ cm², also 45 cm².



Auf das k-fache gestreckte Häuser haben
k-fache Länge
k^2-fache Fläche
k^3-faches Volumen

Das Zweigfraktal besteht aus **z=5** kleinen Zweigen. Jeder hat das Maß M_{klein}.
Das ganze Zweigfraktal hat daher das Maß $5 \cdot M_{klein}$.
Das Zweigfraktal entsteht aus einem kleinen Zweig durch Streckung mit dem Faktor **k=3.**



Das ganze Zweigfraktal hat daher das Maß
$3 \cdot M_{klein}$, wenn das Maß eine Länge ist.
$3^2 \cdot M_{klein}$, wenn das Maß eine Fläche ist.
$3^3 \cdot M_{klein}$, wenn das Maß ein Volumen ist.
Keine der Gleichungen **$5=3$, $5=3^2$, $5=3^3$** ist richtig,
Daher ist das für Fraktale sinnvolle Maß weder Länge, noch Fläche, noch Volumen.

Erfüllbar und sinnvoll ist höchstens die Gleichung $z \cdot Maß_{klein} = k^d \cdot Maß_{klein}$ also $z = k^d$,

umgeformt: $d = \dfrac{\log z}{\log k}$. Dabei ist d **die fraktale Dimension** eines selbstähnlichen Fraktals.