

Fraktale Dimension

Stelle dir eine geometrische Figur vor und strecke sie dann mit dem Streckfaktor k .

Hast du die vorher die Länge L_{alt} gemessen, so hat deine Figur nachher die k -fache Länge.

Die rechte Abbildung zeigt dir, dass aber der Flächeninhalt k^2 -fach so groß wird, das Volumen wird sogar k^3 -fach so groß.

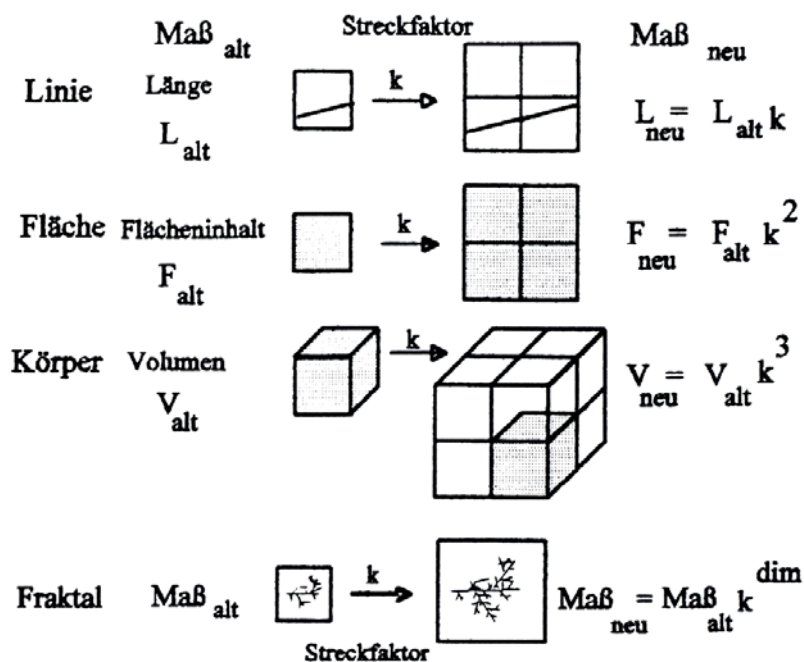
Man sagt:

Eine Linie hat die Dimension 1.

Eine Fläche hat die Dimension 2.

Ein Körper hat die Dimension 3.

Ein Fraktal hat die Dimension dim .



Wenn wir Länge, Flächeninhalt, Volumen... als **Maß** bezeichnen, so gilt offenbar:

$$\text{Maß}_{\text{neu}} = \text{Maß}_{\text{alt}} \cdot k^{\text{dim}}$$

Die "selbstähnlichen" Fraktale haben nun die merkwürdige Eigenschaft, dass sie sich beim Strecken weder wie Linien, noch wie Flächen, noch wie Körper verhalten. Man muss bei ihnen zulassen, dass die Dimension nicht notwendigerweise ganze Zahl ist. Sie kann also eine Bruchzahl oder eine beliebige Kommazahl sein. Weil "fractum" (lat.) gebrochen, bzw. "fraction" (engl.) Bruch heißt, nennt man diese geometrischen Gebilde

Fraktale.

Nicht genug, dass die Fraktale eine Erweiterung des Dimensionsbegriffes erfordern, es sind, je nach Art des oben genannten Maßes, auch noch verschiedene "Dimensionen" für ein Fraktal sinnvoll.

Wir werden die "**Selbstähnlichkeitsdimension**" d und die "**Boxdimension**" D genauer kennenlernen. Den Begründungen sind eigene Seiten gewidmet.

Die Zahlen d und D stimmen nicht immer überein.

Bei selbstähnlichen Fraktalen, die sich nicht selbst überschneiden, gilt: $d = D$.

d bestimmt man durch Nachdenken über Bausteinzahl z und Streckfaktor k (s.u.).

Dann rechnet man aus: $d = \frac{\log z}{\log k}$ d ist nur bei selbstähnlichen Figuren sinnvoll.

D bestimmt man durch Messungen von Fraktalen, die mit verschiedenen Box-Gittern gerastert sind. Bei jeder geometrischen Figur, d.h. auch bei jedem Fraktal, kann man D wenigstens näherungsweise bestimmen.(s.u). Die **Boxdimension** ist vor allem für die Anwendung des Fraktalbegriffs in den Naturwissenschaften und der Medizin wichtig und sinnvoll.