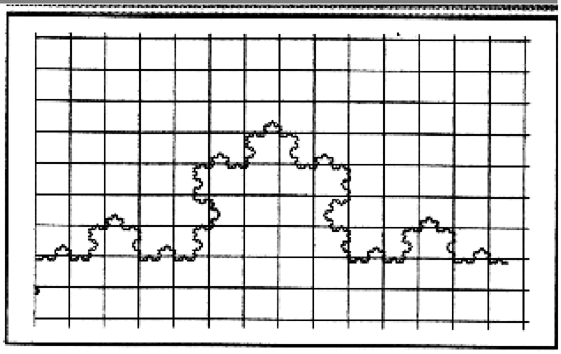
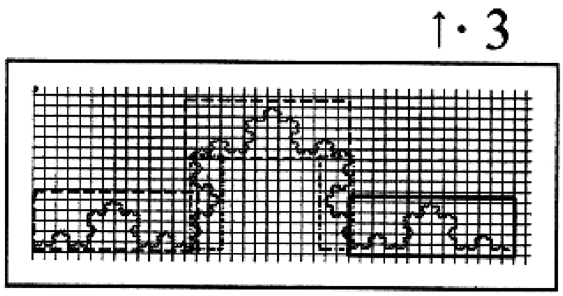
Fraktale Dimension   Box-Dimension D

Prof. Dr. Dörte Haftendorn   www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt   1992, Apr. 2005



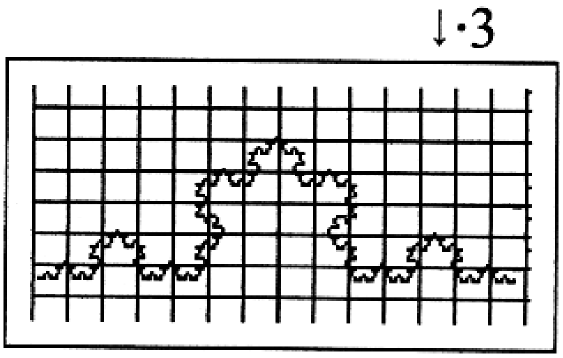
Fraktal derselben Stufe wie im mittleren Bild. Gezeichnet mit weitem Raster.
Es werden m_{weit} Kästchen getroffen.



Ausgangsbild, enges Raster

Es werden m_{eng} Kästchen getroffen.
Überlegung: In dem dicken Rahmen rechts unten werden von dem Baustein genau so viele Kästchen getroffen, wie im untersten Bild, denn das ist eine wirkliche Ausschnittvergrößerung. Die Anzahl sei m_{bau}.
Die gestrichelten Kästen zeigen, dass sicher gilt:

$$m_{eng} > \left(3+\sqrt{3}\right) m_{bau} > 3 \cdot m_{bau}$$



Dies ist also eine wirkliche Ausschnittvergröße-rung des darüber dick eingerahmten Bausteins.
Sie ist daher nicht so fein untergliedert wie Fraktal derselben Stufe wie das Fraktal in der Mitte. (Die Stufe ist um 1
geringer.) Bei einem wahren (idealen) Fraktal ist aber so eine Ausschnittvergrößerung wieder genauso wie das wahre Fraktal.
Dem kommt die oberste Zeichnung näher, obwohl dort das Fraktal feiner gezeichnet ist, gilt etwa

$$m_{bau} \approx m_{weit}$$

Zusammen gilt sicher deutlich: $m_{eng} > m_{weit} \cdot 3 = m_{weit} \cdot k$. Also ist die Kochkurve keine normale Linie.

Für das wahre Fraktal ist dann die Gleichung $\boxed{m_{eng} = m_{weit} \cdot k^D}$ sinnvoll, und der Exponent D heißt **Boxdimension des Fraktals**.

Bei der Kochkurve und anderen überschneidungsfreien Fraktalen stimmt die Boxdimension D mit der Selbstähnlichkeitsdimension d überein. Das kann man sich plausibel machen, Beweise gehen auf die Hausdorff -Dimension zurück. Im Überschneidungsfall ist $D < d$. Damit ist die Boxdimension eher als die Selbstähnlichkeitsdimension geeignet, das äußere Erscheinungsbild der fraktalen Figur zu beschreiben. Bei $1 < D < 2$ ist das Fraktal umso linienähnlicher je dichter D an 1 liegt, und umso flächiger, je dichter D an 2 ist. Mit räumlichen Gittern kann man auch Boxdimensionen von fraktalen Körpern (Schwämmen, Riffen, Wolken, Baumkronen, Lungen,..) bestimmen.