Teilbarkeit, Beweis mit vollständiger Induktion

Behauptung $\boxed{6 \mid 7^n - 1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Ha 06

Erklärung: $a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{N}: a \cdot k = b$

$a, b \in \mathbb{N}$, lies "a teilt b" $13 \mid 91$, denn mit $k = 7 \in \mathbb{N}$ $13 \cdot k = 91$

Beweis mit Vollständiger Ind.:

Verankerung: $n=1$ $6 \mid 7^1 - 1 = 6$ wahre Aussage $6 \cdot 1 = 6$

Noch ein paar Proben um besser zu verstehen

$n=2$ $6 \mid 49 - 1 \iff 6 \mid 48$ w. A. $n=3$ $6 \mid 342$ wahr $k = 57$ und $6 \cdot 57 = 342$

IA $6 \mid 7^n - 1 \iff \exists k \in \mathbb{N}: 6 \cdot k = 7^n - 1$

Ziel: $6 \mid 7^{n+1} - 1 \iff \exists k^*: 6 \cdot k^* = 7^{n+1} - 1$

$n \rightsquigarrow n+1$ $7^{n+1} - 1 = 7^n \cdot 7 - 1 \underset{IA}{=} (6k+1)7 - 1 = 6 \cdot 7k + 7 - 1$

$= 6 \cdot 7k + 6 = 6(\underbrace{7k+6}_{\in \mathbb{N}, \text{ da } k \in \mathbb{N}}) = 6 \cdot k^*$, $k^* \in \mathbb{N}$

q.e.d.

Reiche Aufgabenquelle, denn es gilt:

$r \mid (r+1)^n - 1$

Direkter Beweis mit Auflösen der Klammer,

linke Seite $= (r+1)^n - 1 = r^n + n r^{n-1} + \ldots + n r + 1 - 1$

aus Pascal-Dreieck

$= r(\underbrace{r^{n-1} + n r^{n-2} + \ldots + n}_{\in \mathbb{N}}) = r \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$

qed

Betrachtung: Dieser Beweis ist eleganter. Dafür kann man mit obigem Beweis "vollst. Induktion" üben und hat noch Transferaufgaben.

$10 \mid 11^n - 1$

Hier ist auch eine Endziffernüberlegung möglich.

$12 \mid 13^n - 1$ u.sw.