Haftendorn 06

Vollständige Induktion

Beweisverfahren, mit dem man zeigen kann, dass eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
(oder $\forall\, n \in T \subseteq \mathbb{N}$)

Gegeben ist ein Zusammenhang, ein Prozess, ein Verfahren o.ä. bei dem die die Aussage $A(n)$ durch "Induktion" (= Raten, Hingucken, Idee ...) gewonnen wird. In "Aufgaben" wird $A(n)$ gegeben.

IV ① Verankerung: Man zeigt, dass $A(1)$ wahr ist (oder $A(\text{start})$)

IA ② Man nimmt an, dass $A(n)$ für irgendein n wahr ist und man notiert auch "das Ziel" $A(n+1)$. Dieser Schritt (Schritt) Induktionsannahme

IS ③ Schritt von n auf $n+1$ $n \to n+1$

Man zeigt, dass auch $A(n+1)$ eine wahre Aussage ist, wenn $A(n)$ eine Aussage ist.

Dabei bestimmt man $A(n+1)$ aus dem Gegebenen Zusammenhang (Verfahren ...), achtet darauf, dass $A(n)$ "auftritt" und verwendet dann die vorausgesetzte Wahrheit von $A(n)$

Beispiel $A(n)$: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$

① $n=1$ $\quad 1 \overset{?}{=} \frac{1}{2}\,1(1+1) = 1$
$1 = 1$ wahre A.

② Ziel $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

③ $n \to n+1$ $\quad \sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \underset{JA}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + n+1 = \left(\frac{1}{2}n+1\right)(n+1)$
$= \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ qed