Dörte HAFTENDORN, Lüneburg

Dynamische Mathematik - Bewegung beflügelt Verstehen

Die "Dynamisierung" von Mathematik, die in der Geometrie begann, ergreift nun auch die anderen schulisch relevanten Gebiete, so dass man von "Dynamischer Mathematik" sprechen sollte. Es wird gezeigt, wie schon beim grundlegenden Umgang mit Funktionen und Relationen die interaktive kontinuierliche Variation das Verstehen beflügelt. Dieses gilt erst recht bei den Begriffsbildungen der Analysis (u. a. der Krümmung) und der Stochastik. Dort werden nicht nur bei Verteilungen sondern auch bei der Regression interessante interaktive Möglichkeiten dargestellt. Das Ziel ist sowohl ein vertieftes Verständnis als auch ein größerer Überblick der Lernenden über die "mathematische Landschaft".

Vorbemerkungen

Naturgemäß lässt sich das Wesentliche in gedrucktem Text nicht optimal darstellen. Im Internet aber erreichen Sie unter www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt im Menüpunkt Didaktik –> Vorträge sowohl den vollständigen Vortrag als auch die Links zu den vorgestellten interaktiven Dateien. Letztere sind mit vielen weiteren auch in den entsprechenden Themen erreichbar. Dort finden sich oft Verwirklichungen in weiteren gebräuchlichen Computerwerkzeugen.

Überhaupt ist meist die Wahl des Werkzeuges nicht wesentlich. Sollten hierzu Fragen entstehen, seien Sie ermuntert eine Email zu schreiben.

Grundlegende Einsichten

Die Verkettung von Funktionen lässt sich für jede Stelle x mit einem "Fähnchen" visualisieren. In Abbildung 1 ist das für $f(x)=g(h(x))=\sin(x^2)$ dargestellt.

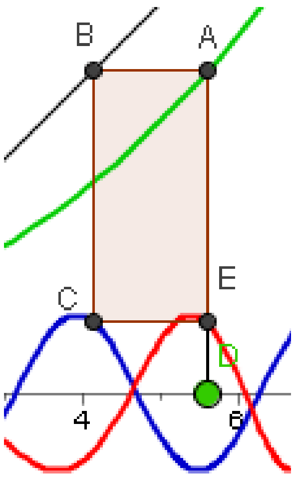


Abbildung 1

Stets geht man von der Stelle x zur inneren Funktion, hier A, zur Winkelhalbierenden, hier zu B, zur äußeren Funktion, hier zu C, und endet über oder unter der Startstelle. Dieses Vorgehen erzeugt auch an der Schultafel schon Einsichten, es wird aber deutlich eindrucksvoller, wenn die Lernenden den Punkt D selbst verschieben können. Ist zunächst die Ortskurve von E gezeichnet, und wird danach erst der Graph von f direkt durch Termeingabe erzeugt, so "zeigt sich" die Richtigkeit des Konzeptes. Dessen Kraft entfaltet sich nun dadurch, dass durch Betrachtung von Nullstellen, Wert-1-Stellen u.s.w der gesamte Verlauf der verketteten Funktion begriffen und begründet werden kann. Dadurch wird gerade beim obigen Beispiel die Überlegenheit mathematischen Argumentierens über die gerade hier oft unzureichende Darstellung im Graphenzeichner augenfällig. Doch damit nicht genug: im Werkzeug GeoGebra (www.geogebra.at) lassen sich Funktionsgraphen, z.B. die Parabel durch A, mit der Maus anfassen und frei verschieben. Der Graph der Verkettung wandelt prompt seine Form und gibt zu vielerlei Beobachtungen Anlass. Last but not least kann jede Funktion in jede andere umdefiniert werden, so dass die Generalisierung in eigentätigem Erkunden erfolgen kann.

“Verstehen wird beflügelt”

Damit ist auch gemeint, dass durch ein solches Vorgehen dem Lernenden von seinem Wissen- und Erfahrungsstand aus ein Überblick, eine souveräne Sicht ermöglicht wird. Den Bedürfnissen der Mädchen kommt dieses sehr entgegen und es baut auch ihre “Angst vor Überraschungen” ab. Bei allen, die vornehmlich anstreben, etwas “ausrechnen zu können” -auch darunter sind viele Mädchen-, zeigt sich das allgemein beklagte Unvermögen zur “Problemlösung”. Noch nicht einmal in der Welt der Ingenieure reicht heute und in Zukunft das “Ausrechnen-Können”. Das machen nämlich die Computer. Gefragt sind Beurteilung und Ergebniskritik, Antizipation, was die Computer zeigen müssten, und vernünftiges Handeln, wenn sie es nicht tun. Planvolle Erkundung, Parametervariation, Strukturierung, Generalisierung sollten Elemente jeden Mathematikunterrichts sein -von Anfang an- und nicht etwa nur eine Krönung für die Leistungskurse.

Auf methodische Fragen, wie Arbeit in Gruppen, an Stationen, mit Lerntagebüchern u.s.w kann hier nicht eingegangen werden. Es ist aber klar, das viele kreative Ansätze ihr lohnendes und reichhaltiges Feld finden können. Auch inhaltlich kann auf diesen wenigen Seiten nicht dargestellt werden, wie ein solches Konzept der Visualisierung und Variation wirklich alle Themen durchziehen kann. Hier sei auf die Internetseiten (s.u.) verwiesen. Statt dessen seien hier noch Besonderheiten vorgestellt, die die Verfasserin selbst entwickelt hat.

Krümmung

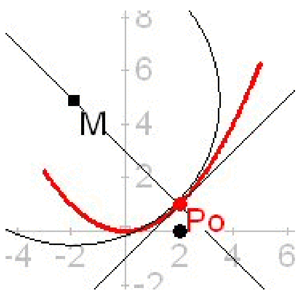


Abbildung 2

Nachdem in einer unterrichtlichen Situation geklärt wurde, dass man sinnvollerweise von “Krümmung” in einem Punkt P sprechen muss, dass ein Kreis gesucht ist, der die Tangente in P berührt, kann man die in Abbildung 2 dargestellte Situation in einem DMS erzeugen oder vorbereitet einsetzen. Durch Ziehen an M vor aller Augen wird die Frage aufgeworfen:

“Welcher der kleineren und größeren Kreise soll denn nun mit Recht **der Krümmungskreis** heißen?”. Einhellig wird der Kreis als bester akzeptiert, der die Kurve in P “durchsetzt”. Da auch die Taylorpolynome 2. Grades i.a. die Kurvengraphen im Entwicklungspunkt “durchsetzen”, kommt man auf die Idee, die Übereinstimmung der 2. Ableitung von Krümmungskreis und f in P zu fordern. Zusammen mit den oben schon genannten Bedingungen folgt die bekannte Krümmungsformel. Dabei geht noch ein, dass Kreise konstante Krümmung haben müssen und dass diese dann der Kehrwert von r sein muss.

Cardanische Formeln

Die Gleichung 3. Grades $x^3 + px + q = 0$ heißt Standardform für die Cardano-Lösung. Man erreicht sie aus des allgemeinen Form durch eine waagerechte Verschiebung. Sie ist mit der **Cardanischen Formel** zu lösen. $xs = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{R}}$ mit $R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ Ist R negativ, tritt der “casus irreducibilis” ein, xs ist keine reelle Zahl, es sind $A := -\frac{q}{2} + \sqrt{-R}\,i$ *und* $B := \frac{q}{2} + \sqrt{-R}\,i$ echt komplexe Zahlen und auch $xs := \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$ ist komplex. Die Herleitung erfolgt durch den Ansatz $xs := u - v$. Es gibt aber hierzu eine reelle Lösung und man kann sie interaktiv mit DMS (Dynamischer-Mathematik-Software), z. B. mit GeoGebra finden.

A und B haben bei positivem q ersichtlich diese Lage in der Gaußschen Zahlenebene. $A3 = \sqrt[3]{A}$ *und* $B3 = \sqrt[3]{B}$ entstehen durch Drittelung des Argument-Winkels und dritte Wurzel aus dem Betrag. C ist die Differenz A3-B3, also xs. Beim **Bewegen** von A in der interaktiven GeoGebra-Datei zeigt sich, dass sich C auf einer Geraden bewegt, wenn man A in beliebige Lagen (im 1. und 2. Quadranten) bringt. Es zeigt sich auch, dass C stets den Argumentwinkel 120/ hat. Nun sollte man an den 3. Einheitswurzeln $z^3 = 1$ überlegen, dass im Komplexen die 3. Wurzeln auf einem “Mercedes-Stern” liegen. Daher kann man den Punkt Cre finden, indem man den Betrag von C mit dem Vorzeichen von q auf der reellen Achse abträgt. Also ist die gesuchte reelle Lösung

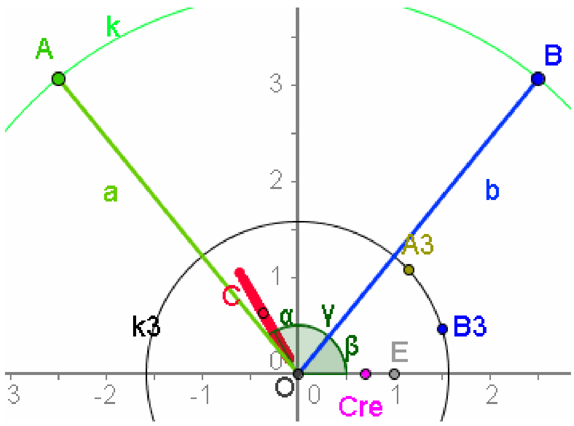


Abbildung 3

$$s = Cre = sign(q) \cdot |C| = sign(q)|xs| = sign(q) \cdot \sqrt{\Re(xs)^2 + \Im(xs)^2} \quad .$$

Man kann die Interaktion auch direkt von p und q aus der Standardform abhängig gestalten. In GeoGebra ergibt sich s dann mit bis zu 5-stelliger Genauigkeit. Das Polynom der Standardform und das Restpolynom kann man noch dazu zeichnen und sich so von der Richtigkeit überzeugen. Andererseits liefern natürlich GTR und die CAS für numerische p und q sofort numerische Werte, ebenso GeoGebra selbst. Mit Parametern p und q erzeugen Mathematica, Maple und Derive komplexe oder trigonometrische Ausdrücke. Sie alle liefern aber nicht das obige xs, dessen Herleitung noch auf Schulniveau vertretbar ist (siehe Internet, s.u.), sondern den (im casus irreduzibilis) reellen Repräsentanten der dritten Wurzel, oben Punkt Cre. Also passen die Cardanischen Formeln der Formelsammlungen -sofern sie nicht unübersichtliche Fallunterscheidungen vorschlagen- und die praktische Berechnung der CAS nicht ohne weiteres zusammen. Mit obiger Idee und ihrer interaktiven Verwirklichung kann aber **verstanden** werden, wie die Lösungen gefunden werden.

Regression

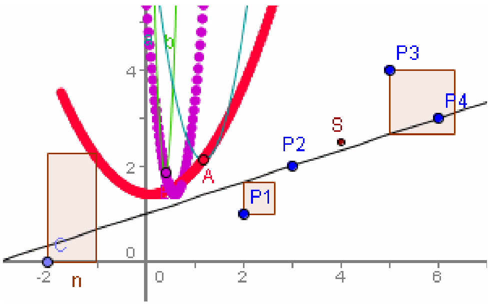
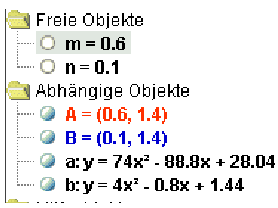


Abbildung 4

Für Messpunkte P_i und eine beliebige Gerade $g(x) = y = m \cdot x + n$ können mit $\hat{y}_i = g(x_i)$ die "Fehlerquadrate" $(y_i - \hat{y}_i)^2$ und deren Summe S (hier links) leicht visualisiert werden. Bewegt man m und n einzeln, so lässt sich ein minimales S nur schwer durch "Hinschaukeln" finden. Hier ist nun eine interaktive Methode vorgestellt, die eine fünfstellig genaue Bestimmung von m und n samt der zugehörigen Probe erlaubt. Oben sind zwei dünn gezeichnete Parabeln mit ihren Scheiteln A b.z.w. B sichtbar. Sie sind Schnitte durch die räumlich aufgefasste Funktion $z = S(m,n)$. Variiert man nun m, so zeichnet der Scheitel A seine Ortslinie (oben breit, rot) und man hält im tiefsten Punkt an. Ebenso verfährt man für n. Diese Bewegung ist von der vorigen unabhängig. Die richtige Stellung ist die einzige, in der A <u>und</u> B die Abszissen m b.z.w. n <u>und</u> denselben Wert als Ordinate haben. Dieser ist dann auch die kleinste Fehlerquadratsumme.



Literatur und weitere Informationen

[Ha] Haftendorn: "Kurven", www.uni-lueneburg.de/mathe-lehramt