Sek I
Füllhorn

Einige erprobte Strategien, gesammelt in 28 Lehrerjahren in Klasse 5 bis ultimo

Prof. Dr. Dörte Haftendorn
Uni Lüneburg 2004 und 2008

Füllhorn Sekundarstufe I, erprobte Strategien für die heiklen Stellen des Mittestufen-Mathematikunterrichts

Seite	Thema	Bemerkung
2	Inhaltsverzeichnis	
3	Intention des Füllhorns	Anlass und Adressaten
4	Kopfrechnen	Tipp "Kern der Rechnung"
5	Größen im MU, Vorstellung !!	Ergebnis prüfen, siehe auch Seite
6	Lieber nur einfache Fälle	kein "Kinderschreck", nicht Themen weglassen
7	"Aspekte-Wechsel" , Freiheiten	Gl—Graph—Tabelle—Situation, in Worte fassen
8	**Bruchrechnung** Mal	**Prinzip der Rechenreihen**, auch geeignet für Kometenzlücken in späteren Schuljahren
9	geteilt Bruch : Ganze	
10	geteilt Bruch : Bruch	
11	...... Vor dem Rechnen Kürzen	
12	Umgang mit gemischten Zahlen	hier immer mit Verständnis arbeiten
13	Periodische und abbrechende	incl. Rückverwandlung
14	**Negative Zahlen** Einführung	Auf- und ab-Wandern am Toten Meer Minus-Rechnung in Pfeildarstellung
15	plus-positive Zahl Rechnung	sorgfältiger Aufbau der verschieden Fälle
16	Erarbeitung von Bereinigungsregeln	Achtung, wichtige Stelle,
17	Waggon-Auffassung !!!!	Sicherer Weg zu korrekten Umstellungen !!!!!!!!!!
18	**Punktrechnung, negative Z.**	Rechenreihen, sicherer Weg
19	Hinführung zu Minus*Minus	
20	**Prozentrechnung Einführ.** "von" bei Anteilen wird zu "mal"	Konsequente Indentifizierung von Bruch, Dezimalzahl und Prozentzahl, "Pfeil-Schreibweise" parallel verwenden.
21	Grundaufgaben 1 und 2	anbindung an "Zuordnungen", vorher gewesen
22	Grundaufgabe 3 Vermehrung des Grundwertes	"Prozente sind Anteile" !!!! Keinesfalls taucht hier die 100 dauernd auf !!! Keine unverstanden Formeln, aber Denkprozesse
23	Wurzeln Einführung	allererste Erkundung siehe auch Algebra->Zahlaufbau
24	Heron-Verfahren	Web siehe Algebra->Zahlaufbau->Reelle Zahlen
25/27	Übungen zu Funktionsgraphen	frabig und interaktiv siehe Website Fkt.und Graphen
28-32	**Logarithmus und seine Gesetze**	!!!! Heikles Thema, wichtiger Handlungsvorschlag
33-36	Umkehrfunktion, alle Fälle	das interaktiv auch ausf. auf der Website
37-41	Wachstum und Zerfall	das interaktiv auch ausf. auf der Website
42	"Größenwahn" von A.Müller	Uni Landau, Aufsatz
43-44	Fermifragen	von Leuders u.Holzapfel, Aufsatz und Vorschläge
44-47	Geschlosse / offene Aufgaben	Leuders Uni Freiburg, Infoblätter

Die Seiten 42 bis 47 sind von anderen Autoren und daher nur im Seminar verfügbar

Füllhorn Sekundarstufe I, erprobte Strategien für die heiklen Stellen des Mittestufen-Mathematikunterrichts

Intentionen und Anlass und Adressaten

- Anlass: Im WS 2004-SS 05 studierten an unsrer Universität fertige Wissenachaftler einen einjärigen Master-Studiengang um sich als Lehrer für Haupt- und Realschule zu qualifizieren. Die Mathematik als Fach gewählt hatten, waren Vulkanologin, Vermessungsingenieur, Chemiker, us.w..Sie brauchten dringend je Semester eine Mathematikdidaktik-Veranstaltung. Es fand hier aber gerade ein Generatonswechsel statt, so dass ich alleine übrig war, das über mein Deputat hinaus zu machen. Obwohl wir noch vieles angesprochen haben, wünschten diese eine solche Zusammenstellung. Daher auch die Handschrift.
- Adressaten: Angespochen sind alle, die in der Sekundarstufe 1 Mathematik unterrichten und diejenigen, die in der Sek.II auf Inkompetenzen in den genannten Themen stoßen.
- Intentionen: Ich bin den Mittelstufenstoff durchgegangen und habe meine **"Königswege"** zusammegestellt. Dabei habe ich vor allem die Stellen ausführlich dargestellt, die sich einerseits ganz besonders bewährt haben, die ich auch in meinem Lehrerdasein immer wieder an der Realität "geschliffen" habe. Andererseits aber eignen sich die Verfahren auch, in den "Zahlücken-Situation" der **höheren Klassen –bis zur Uni— ganz ehrlich ein Verständnis neu entstehen zu lassen.** Es nützt nichts –und ist geradezu kontraproduktiv— die Lernenden zu beschämen "Was????, das könnt Ihr nicht????"
  Diese Lernenden sind ja jetzt älter und die Einsicht in solche elementaren Arbeitsweisen wie sie z.B. die Rechenreihen bieten, ist sicher zu haben. So kann ein Grundvertrauen in die eigene Kompetenz neu gewonnen werden. Völlig unfruchtbar und überhaupt nicht nachhaltig ist das Anwenden von Formeln, vor allem wenn sie in der "Mangelsituation" nicht neu eingesehen werden konnten.
  Weiter habe besonders die Themen dargestellt, die wenig in den Schulbüchern stehen.
- Auslassungen: Die Zusammenstellung ist natülich überhaupt nicht vollständig. Themen, die üblicherweise angemessen unterrichtet werden und Geometrie und Stochastik habe ich hier nicht behandelt. Wichtig ist mir noch Etliches, das finden Sie auf der Website. Ein guter Einstieg für schulnahe Sachen ist **"Didaktik".**
  Die Seiten **"Lernpakete"** sind insbesondere geeignet (und dafür konzipiert), schulisches Handwerk zu zeigen und damit Hilfen für meine Studierenden und Andere zu geben.

Kopfrechnen

immer aber nur, was im Kopf sinnvoll ist

Bei allen Einführungen ausführlich mit ganz einfachen Zahlen rechnen.

Klare Regeln, was man im Kopf können soll.

Einige Zahlen kennen z.B. Quadrate

Strategien erklären lassen

Plural!!! Kniffe: $\cdot 5 = \cdot 10 : 2$

Das Prinzip "Kern der Rechnung"

z.B

$5 \cdot 7 = 35$

$50 \cdot 7 = 350$

$50 \cdot 70 = 3500$

$5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5$

Überschläge, Hilfen geben, wie weit man sich vom genauen Wert entfernen darf: "Mut"

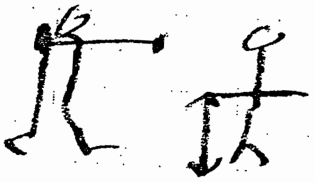
Größen

immer an Erfahrung anbinden

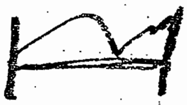
immer plausibel machen

„menschliche Maße

1m



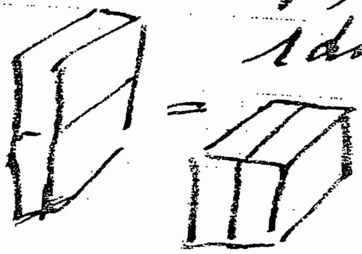
2m
≙ Bett



1 t ≙ kleines Auto

1 m² Tafel„flügel" (ca)

1 l Milchtüte



1 a mit Zeitungs-m² selber legen

In Gleichungen in Math. nicht unbedingt richtige Größen schreiben aber auf „Anpassen der Größen" achten.

45 N

⇝ Fermi-Fragen

In Kl. und HA: „Wundern wenn falsch"

Lieber nur einfache Fälle behandeln als ganze Aufgabenklassen oder gar Themen weglassen.

z.B. Bruchgleichungen

$$\frac{10}{x+3} = 5$$ u.ä.

auch $$\frac{1}{R} = 2\pi$$

Strategie "Mit dem ekligen Nenner malnehmen"

u.a. Formel-Umstellungen

$$2^x = 17 \;|\; lg$$

$$lg\, 2^x = lg\, 17$$

$$x \cdot lg 2 = lg 17$$

$$x = \frac{lg 17}{lg 2}$$

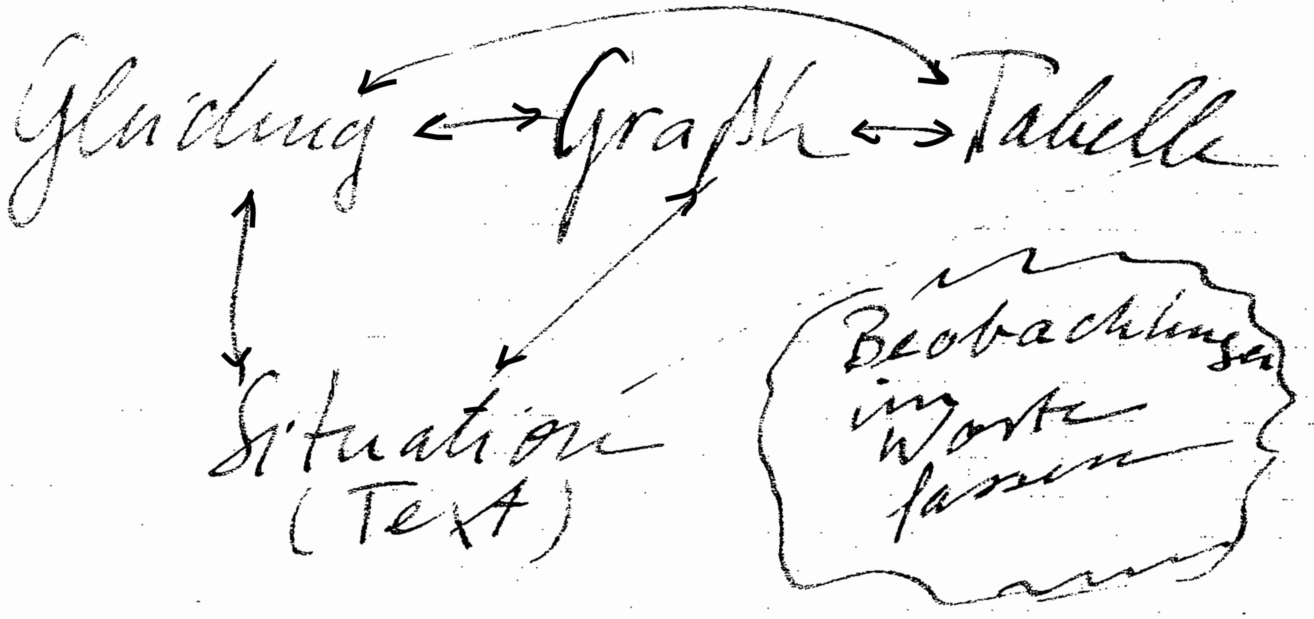
← immer mit der Log-Tarnkappe
(ln später)

und nicht mit log zur Basis 2

"Braucht man den Exponenten nimmt man den lg oder ln"

Lieber überschaubare Terme verstanden umformen als "wilde Jungs" vom Typ Kinderschreck.

Fenster-Wechsel



Freiheiten lassen

Aufgaben erfinden lassen
auch in Übungen wenigstens
selbst Zahlen wählen
dürfen.

HA zur Auswahl stellen

Lernstoff strukturieren

"Was haben wir schon gelernt"
"Was können wir demnächst"
"Was müssen wir noch mal lernen"

Problem analysieren:

"Was ist an dieser Aufg. neu?/unverständlich?/ungewohnt?"

Warum hat der Buchautor diese A. geschrieben?

Rechenreihen zu Mal bei Brüchen und ganzen Z.

$8 \cdot 3 = 24$) :2
:2 $4 \cdot 3 = 12$) :2
:2 $2 \cdot 3 = 6$) :2
:2 $1 \cdot 3 = 3$) :2
:2 $\frac{1}{2} \cdot 3 = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$) :2
:2 $\frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$

$2 \cdot 9 = 18$) :3
$2 \cdot 3 = 6$) :3 (:3 am zweiten Faktor)
$2 \cdot 1 = 2$) :3 (:3 am zweiten Faktor)
$2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (:3 am zweiten Faktor)

Man multipliziert { einen Bruch mit einer g. Z. / eine ganze Zahl mit einem Bruch

indem man den den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert und den Nenner beibehält

$\frac{1}{8} \cdot 7 = \frac{7}{8}$ $\qquad$ $\frac{1}{7} \cdot 5 = \frac{5}{7}$

$\frac{2}{8} \cdot 7 = \frac{2 \cdot 7}{8} = \frac{7}{4}$ $\qquad$ $\frac{2}{7} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 5}{7} = \frac{10}{7}$

$\frac{3}{8} \cdot 7 = \frac{3 \cdot 7}{8} = \frac{21}{8}$ $\qquad$ $5 \cdot \frac{2}{7} = \frac{5 \cdot 2}{7} = \frac{10}{7}$

Dauerregel: Vor dem Rechnen kürzen

Hat man Malaufgaben in Zähler und Nenner, dann kann man evt. kürzen

Voraussetzung a) Klar muss vorher sein "Stammbrüche"

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, ":2"] \arrow[d, "\cdot 3"] & \frac{1}{2} \arrow[r, ":2"] \arrow[d, "\cdot 3"] & \frac{1}{4} \arrow[r, ":2"] \arrow[d, "\cdot 3"] & \frac{1}{8} \\ 3 \arrow[r, ":2"] & \frac{3}{2} \arrow[r, ":2"] & \frac{3}{4} & \end{tikzcd}$$

} dies entspricht dann auch obigen Rechenreihe

Das "prozesshafte" (operatormäßige) Denken ist leichter.

Rechenreihen zu (geteilt) Bruch : Ganze parallel zur Operatorschreibweise

$1 : 2 = \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{dann}}$ * $3 : 2 = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$ $\frac{3}{2} : 2 = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$ $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$

Man teilt einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem man

{ den Zähler durch die Zahl teilt, wenn es aufgeht **
oder
den Nenner mit der Zahl malnimmt. ***

$\boxed{\text{davor}}$ * $\frac{8}{7} : 2 = \frac{4}{7}$ $\frac{12}{5} : 4 = \frac{3}{5}$

$\frac{4}{7} : 2 = \frac{2}{7}$ $\frac{3}{5} : 4 = \frac{3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$

$\frac{2}{7} : 2 = \frac{1}{7}$ $\frac{3}{20} : 4 = \frac{3}{20 \cdot 4} = \frac{3}{80}$

$\frac{1}{7} : 2 = \frac{1}{7 \cdot 2} = \frac{1}{14}$

** das passt zur Anzahl-Vorstellung für den Zähler und wird daher gut verstanden.

*** Vorstellung: Wenn's nicht passt, muss man weiter teilen.

Man sollte auch nun betonen, das $\textcircled{:}$ und Bruchstr. dasselbe ist

$5 : 3 = \frac{5}{3}$ $\frac{7}{8} = 7 : 8$ $\frac{1}{4} : 3 = \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{4 \cdot 3}$

erste Doppelbrüche ! !!

Rechnen reichen zu Bruch · Bruch

$$\frac{2}{5}\cdot 12 = \frac{2\cdot 12}{5} = \frac{24}{5}$$

$$\downarrow :4 \qquad \downarrow :4$$

$$\frac{2}{5}\cdot 3 = \frac{2\cdot 3}{5} = \frac{6}{5} \xrightarrow{:4} \frac{6}{5\cdot 4}$$

$$\downarrow :4$$

$$\frac{2}{5}\cdot \frac{3}{4} = \frac{2\cdot 3}{5\cdot 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = \frac{6}{20}$$

Begr. auch über

$$\left(\frac{2}{5} : 4\right)\cdot 3 = \frac{2}{5\cdot 4}\cdot 3 = \frac{2\cdot 3}{5\cdot 4}$$

„Vor dem Rechnen Kürzen“ als Erleichterung!!

$$\frac{11}{8}\cdot\frac{17}{44} = \frac{\overset{1}{\cancel{11}}\cdot 17}{8\cdot \underset{4}{\cancel{44}}} = \frac{17}{32}$$

$$\frac{15}{28}\cdot\frac{16}{27} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}\cdot\overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{7}{\cancel{28}}\cdot\underset{9}{\cancel{27}}} = \frac{5\cdot 4}{7\cdot 9} = \frac{20}{63}$$

damit das erkannt wird muss man bei Teilbarkeit und Kopfrechnen ordentlich gearbeitet haben.

Regel Man nimmt einen Bruch mit einem anderen Bruch mal, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner malnimmt (wie immer: Vor dem Ausrechnen Kürzen)

Rechenregeln zu Bruch : Bruch

$$\frac{5}{7} : 12 = \frac{5}{7 \cdot 12} = \frac{5}{84} \quad \text{weil } 12 \cdot \frac{5}{84} = \frac{\cancel{12}^{1} \cdot 5}{\cancel{84}_{7}} = \frac{5}{7}$$

$$\downarrow :4 \qquad \downarrow \cdot 4$$

$$\frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{7 \cdot 3} = \frac{5}{21} \quad \text{weil } 3 \cdot \frac{5}{21} = \frac{\cancel{3}^{1} \cdot 5}{\cancel{21}_{7}} = \frac{5}{7}$$

$$\downarrow :4 \qquad \downarrow \cdot 4$$

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3} = \frac{20}{21} \quad \text{weil } \frac{3}{4} \cdot \frac{20}{21} = \frac{\cancel{3}^{1} \cdot \cancel{20}^{5}}{\cancel{4}_{1} \cdot \cancel{21}_{7}} = \frac{5}{7}$$

Man teilt einen Bruch durch einen zweiten Bruch, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrbruch / Kehrwert des zweiten Bruches malnimmt.

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3} = \frac{20}{21}$$

Vor dem Ausrechnen kürzen

$$\frac{15}{77} : \frac{3}{44} = \frac{15 \cdot 44}{77 \cdot 3} \underset{k3}{=} \frac{5 \cdot 44}{77} \underset{k11}{=} \frac{5 \cdot 4}{7} = \frac{28}{7}$$

Kürze erst, wenn du in Zähler und Nenner Malaufgaben hast.

Gemischte Zahlen

sind dazu da, dass man sich die Größe einer Bruchzahl besser vorstellen kann und z.B. auf dem Zahlenstrahl eintragen kann. Zum Rechnen sind sie selten gut.

Was glatt geht $1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 4\frac{3}{4}$

↳ $5\frac{1}{7} + 7\frac{5}{7} = 12\frac{6}{7}$

V O $1\frac{1}{2} \cdot 7 = 7 + \frac{7}{2} = 7 + 3\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$

V O $1\frac{1}{2} : 7 = \frac{3}{2} : 7 = \frac{3}{14}$

Umwandeln sinnvoll

$1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{3}{4} = \frac{3}{2}{}^{7} \cdot {}_{7}\left(\frac{8}{4} + \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{11}{4} = \frac{33}{8}$

Umwandeln notwendig.

Regel Gemischte Zahlen vor <u>Punkt</u>rechnungen <u>besser</u> umwandeln.

Fallen

$3\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} = \underbrace{2 + \frac{1}{2}}_{\text{einen Ganzen verwandeln.}} - \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$

Schlimmer Fehler

$\overset{?}{\underset{f}{=}} \left(2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4}$ ja

$3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4} \overset{?}{\underset{f}{=}} 6\frac{3}{8}$

richtig

bevorzugen

entweder Umwandeln oder $\cdot 7$ … später $: 2$

$3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{3}{4} = \left(7 \cdot 2\frac{3}{4}\right) : 2 = 7 \cdot 1\frac{3}{8} = 7\frac{21}{8} = 9\frac{5}{8}$

$\frac{7}{2} \cdot \frac{11}{4} = 77/8 = 9\frac{5}{8}$ echt besser

Arithmetik Periodische Brüche, Typ $1/n$, Stammbrüche

Abbrechende Dezimaldarstellung:

Die Dezimaldarstellung bricht genau dann ab, wenn man den Bruch so erweitern kann, dass der Nenner eine Potenz von Zehn wird.
Die Dezimaldarstellung bricht genau dann ab, wenn n ausschließlich die Primfaktoren 2 und 5 enthält.

Beweis: "$\Leftarrow$" $n = 2^r 5^s$ mit $r,s \in \mathbb{N}_0$.

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2^r 5^s}\,\frac{2^{m-r}5^{m-s}}{2^{m-r}5^{m-s}} = \frac{2^{m-r}5^{m-s}}{2^m 5^m} = \frac{2^{m-r}5^{m-s}}{10^m} \text{ mit } m := \max(r,s)$$

$$\frac{1}{250} = \frac{1}{2\cdot 5^3} = \frac{1}{2^1 5^3}\,\frac{2^2}{2^2} = \frac{2^2}{2^3 5^3} = \frac{4}{10^3} = 0{,}004 \text{ im Beispiel}$$

"$\Rightarrow$" $z = 0{,}a_1 a_2 .....a_r$ mit Ziffern a_i also $\frac{a_1 a_2 .....a_r}{10^r} = \frac{a_1 a_2 .....a_r}{2^r 5^r}$

$$\text{im Beispiel } z = 0{,}0248 = \frac{248}{10000} = \frac{8\cdot 31}{2^4 5^4} = \frac{31}{2\cdot 5^4}$$

Periodische Dezimaldarstellung

Die Dezimaldarstellung wird genau dann periodisch, wenn n irgendeinen anderen Primfaktor als 2 oder 5 enthält. Die Periodenlänge ist maximal n-1.

Beweis: Beim schriftlichen Teilen 1:n nach der Methode von Klasse 6 merkt man, dass es nur n-1 verschiedene Reste geben kann. Darum kommt -in der Phase , in der man nur noch Nullen herunterholt- nach spätestens n-1 Schritten ein voriger Rest nochmal.

n enthalte nun keine 2 und keine 5 mehr, also $\mathrm{ggT}(10,n) = 1$

Dann ist die Periodenlänge **ein Teiler von** $\varphi(n) = \mathrm{Euler}(n) =$ Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen= $\left|\mathbb{Z}_n{}^*(n)\right|$ Beispiel $\frac{1}{37} = 0{,}\overline{027}$ und $p = 3\,|\,36 = 37-1$

Beweis: *(Lesen Sie erst die Rückverwandlung von periodischen Dezimalzahlzahlen in Brüche!)* *

Betrachte $\frac{1}{n} = 0{,}\overline{b_1 b_2 ... b_p} = \frac{b_1 b_2 ... b_p}{99......9} = \frac{b_1 b_2 ... b_p}{10^p - 1} \Leftrightarrow 10^p - 1 = b_1 b_2 ... b_p \bullet n \underset{n}{\equiv} 0$

Also $10^p \underset{n}{\equiv} 1$,d.h. Periodenlänge p ist die Ordnung von 10 in der Gruppe $\mathbb{Z}_n{}^*(n)$. Da die Elementordnung die Gruppenordnung teilt, ist die Behauptung für sofort-periodische Dezimalzahlen bewiesen. *Und wenn sie noch nicht die Kryptographievorlesung gehört haben oder sonst von Gruppentheorie keine Ahnung haben, dann ziehen nur das Resumee: "Also man kann das zeigen".*
Vorperioden ändern diesen Zusammenhang nicht, denn

$$\frac{1}{n} = 0{,}a_1 a_2 ... a_v \overline{b_1 b_2 ... b_p} = (a_1 a_2 ... a_v + 0{,}\overline{b_1 b_2 ... b_p})\cdot 10^{-v}$$

$$0{,}083333333.... = (8 + 0{,}\bar{3})\cdot 10^{-2} = (8 + \frac{3}{9})\cdot 10^{-2} = \frac{8\cdot 9}{900} + \frac{3}{900} = \frac{75}{900} = \frac{1}{12}$$

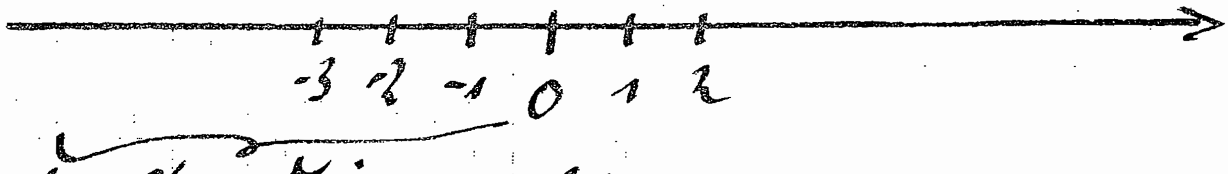
$* \; 0{,}\overline{72} = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$

$0{,}0\overline{72} = \frac{72}{990} = \frac{8}{110}$

$= \frac{4}{55}$

Negative Zahlen

1. Phase Wandern am toten Meer
allerlei Skalen
Ende: Wir erweitern den
Zahlenstrahl nach links

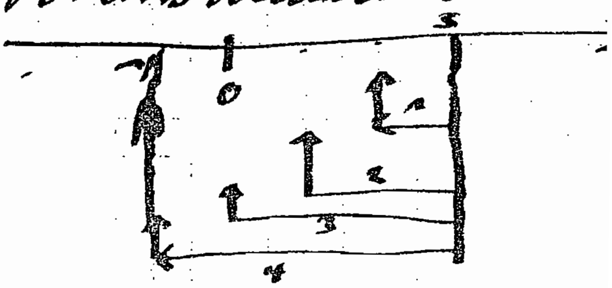


Taufe die Minuszahlen

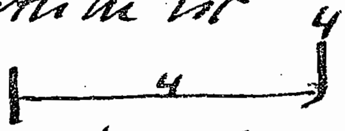
Wie entstehen Minuszahlen beim Rechnen:

3 - 1 = 2
3 - 2 = 1
3 - 3 = 0
3 - 4 = -1
3 - 5 = -2
3 - 6 = -3

Veranschaulicht



eigentlich ist



dies der
Pfeil von der 4

Hier starte ich

für [Minus-Rechnung]
drehe ich den Pfeil der zweiten
Zahl um

und hänge ihn dann an den
Pfeil der ersten Zahl an.

Kann man Minuszahlen durch Rechnen wieder auf Pluszahlen kommen?

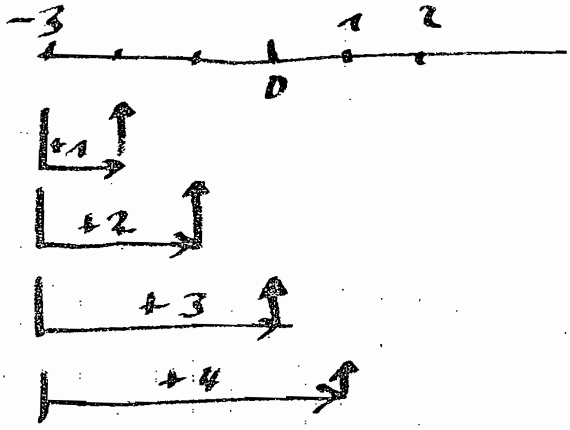
-3 + 1 =

-3 + 2 =

-3 + 3 =

-3 + 4 =

-3 + 5 =



Überlegen lassen. ②

Bei der 1. Zahl starte ich.
Für Plus-Rechnung
hänge ich den Pfeil der
2. Zahl an.

Kann man von einer Minuszahl aus auch noch Minus-Rechnen?

3 - 2 = 1

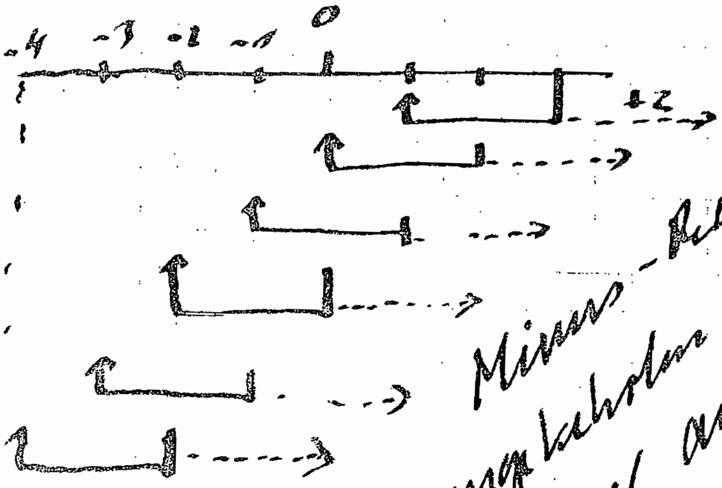
2 - 2 = 0

1 - 2 = -1

Gd 0 - 2 = -2

-1 - 2 = -3

-2 - 2 = -4

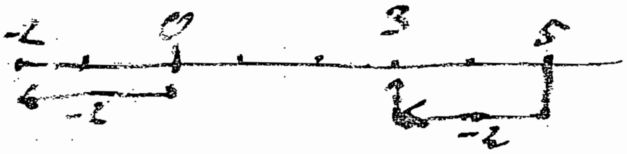


Minus-Rechnung
= umgekehrten Pfeil anhängen

Minuszahlen als 2. Zahl in der Rechnung

$5+(-2) =$ was soll das sein?

Nimm die Plus-Rechnung-Regel

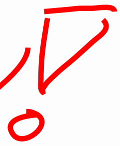


Pfeil von der -2 anhängen

Also $5+(-2)=3$

$5+(-2)=5-2 \;=3$

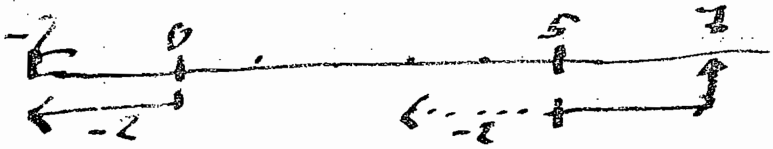
bereinigt



Schlüsselwort

$5-(-2)=$ was soll das sein?

Nimm die Minus-Rechnung-Regel



Pfeil von der -2 umdrehen und anhängen

Also $5-(-2)=7$

$5-(-2)=5+2 \;=7$

bereinigt

Bereinigungsregeln

$-(-2) \;=+2$

$+(-2) \;=-2$

$-(+2) \;=-2$

$+(+2) \;=+2$

Minus eine Minuszahl ist Plus (Betrag der) Zahl
die

Plus eine Minuszahl ist Minus die Zahl

wichtig

$11 - (-3) + (-1) + (+7) - (+10)$

$= 11 + 3 - 1 + 7 - 10$

bereinigen

$= \boxed{+11}\boxed{+3}\boxed{-1}\boxed{+7}\boxed{-10}$

Waggons $\boxed{\text{Zeich Zahl}}$ darf man umstellen

$= \boxed{+11}\boxed{-1}\boxed{+3}\boxed{+7}\boxed{-10}$

$= \boxed{+10}\boxed{+10}\boxed{-10}$ Ersatzwaggon

$= \boxed{+10}\boxed{+0}$

$= +10$

in der Lernphase führende + hinschreiben lassen

„da hab' ich dran gedacht"

Punktrechnung

Mal als Abkürzung für viele Plus

$3+3+3+3 = 4\cdot 3$ 4 mal die 3 plus gerechnet.

$= 12$

$-3+(-3)+(-3)+(-3) =$ bereinigt

$-3-3-3-3 = -12$

abgekürzt → $4\cdot(-3) = -12$

$\}$ das muss so sein

Ebenso

$4+4+4 = 4\cdot 3$ die 4 dreimal genommen addiert

$-4+(-4)+(-4) = (-4)\cdot 3$

$= -4-4-4 = -12$

$\}$ muss also

Also $4\cdot(-3) = -12$

$(-4)\cdot 3 = -12$

Rechenreihen dazu

$4\cdot 3 = 12$

-4

$4\cdot 2 = 8$

-4

$4\cdot 1 = 4$

-4

$4\cdot 0 = 0$

-4

$4\cdot(-1) = -4$

-4

$4\cdot(-2) = -8$

-4

$4\cdot(-3) = -12$

$4\cdot 3 = 12$

-3

$3\cdot 3 = 9$

-3

$2\cdot 3 = 6$

$1\cdot 3 = 3$

$0\cdot 3 = 0$

$(-1)\cdot 3 = -3$

$(-2)\cdot 3 = -6$

$(-3)\,3 = -9$

$(-4)\cdot 3 = -12$

Kombinierte Rechenreihen

$-2 \cdot 3 = -6$

+2

$-2 \cdot 2 = -4$

+2

$-2 \cdot 1 = -2$

+2

$-2 \cdot 0 = 0$

+2

! $-2 \cdot (-1) = +2$

+2

$-2 \cdot (-2) = +4$

+2

$-2 (-3) = +6$

Also

$\boxed{\text{Minus-Zahl mal Minus-Zahl} = \text{Plus-Zahl}}$

Falle:

Minus-Zahl Minus Minus-Zahl

= Minus-Zahl Plus die Zahl = Unklar

Kommt auf die Größe an.

Prozentrechnung

Prozente und Anteile

1 Prozent = 1% = $\frac{1}{100}$ = 1 von 100 Teilen des Ganzen

= 0,01

2 Prozent = 2% = 0,02 = $\frac{2}{100}$ = 2 von 100 Teilen des Gan

⋮

‖ „von" bei Anteilen wird „mal" ‖

$\frac{1}{2}$ von 12 = $\frac{1}{2} \cdot 12 = \frac{12}{2} = 6$

$= 0{,}5 \cdot 12 = 6$

$= 50\% \cdot 12 = 6$

Lerne:

$\frac{1}{2} = 50\% = 0{,}5 = \frac{5}{100}$

$\frac{1}{4} = 25\% = 0{,}25 = \frac{25}{100}$

$\frac{1}{8} = 12{,}5\% = 0{,}\underbrace{12}5 = \frac{12{,}5}{100} = \frac{125}{1000}$

Ebenso $\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{5}$ ....

Diese beiden Stellen als volle Prozente lesen

Pfeilschreibweise

$12 \xrightarrow[\cdot 0{,}5]{\cdot 50\%} 6$

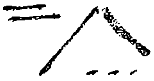
$\xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}}$

später

$211{,}50\,€ \xrightarrow[\cdot 0{,}7]{\cdot 70\%}$ ......

oder

TR $211{,}50 \cdot 70\boxed{\%}$ =



oder

$211{,}50 \cdot 0{,}7$ =

das TR-ergebnis

kommt heraus wie Mehl aus der Mühle

Grundaufgaben

$$\text{Grundwert} \xrightarrow[\cdot p\%]{\cdot \text{Prozentsatz}} \text{Prozentwert}$$

① $G \xrightarrow{\cdot p\%} P$ $\qquad 200\,€ \xrightarrow[\cdot 0{,}06]{\cdot 6\%} \underline{\underline{12\,€}}$

Im 2-Schritt

$$\begin{tikzcd}
200\,€ \arrow[rr, "\cdot 0{,}06"] \arrow[dr, ":100"', "\cdot 0{,}01"] & & 12\,€ \\
& 2\,€ \arrow[ur, "\cdot 6"'] &
\end{tikzcd}$$

Im 3-Satz

$$\begin{array}{rrcrl}
 & 100\% & \text{entspricht} & 200\,€ & \\
:100 & \boxed{1}\% & \widehat{=} & 2\,€ & :1 \\
\cdot 6 & 6\% & \widehat{=} & \underline{\underline{12\,€}} & \cdot 6
\end{array}$$

Regel: ! Die 1 kommt dahin wo ? wichtit

② $\boxed{G} \xrightarrow{\cdot p\%} P$ $\qquad ? \xrightarrow[\cdot 0{,}09]{\cdot 9\%} 18\,€$

$$\boxed{200} \xleftarrow{:0{,}09}$$

in 2-Schritt

$$\begin{tikzcd}
\boxed{200} & & 18\,€ \arrow[dl, "\cdot 9"] \\
& 2\,€ \arrow[ul, "\cdot 100"] &
\end{tikzcd}$$

in 3-Satz.

$$\begin{array}{rrcrll}
① :9 & 9\% & \widehat{=} & 18\,€ & & \\
 & 1\% & \widehat{=} & 2\,€ & & ② \\
\cdot 100 & 100\% & \widehat{=} & ? & \cdot 100 & \\
 & 100\% & \widehat{=} & \underline{\underline{200\,€}} & &
\end{array}$$

③ $G \xrightarrow{\boxed{p\%}\ ?} P$

Prozente sind Anteile vom Ganzen

$$p\% = \frac{P}{G}$$

$$\frac{8€}{40€} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$$

Probe

$$40€ \xrightarrow{\cdot 0{,}2} 8€$$

Im 3-Satz.

1 kommt dahin wo ? nicht ist →

$$\begin{array}{rcl}
100\% & \hat{=} & 40€ \\
?\% & \hat{=} & 8€ \\
\frac{100}{40}\% & \hat{=} & 1€ \\
\frac{100}{40}\cdot 8\% & \hat{=} & 8€
\end{array}$$

:40 ① (von 40€ zu 1€), :40 ② (von 100% zu $\frac{100}{40}\%$), ·8 ③ (von 1€ zu 8€), ·8

$$\underline{\underline{20\%}} = \frac{10}{\cancel{4}_1}\cdot \overset{2}{\cancel{8}}\% = \frac{100}{40}\cdot 8\%$$

Vermehrung des Grundwertes um p%

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\cdot p\%"] \arrow[rr, bend right, "\cdot(1+p\%)"'] & P_{\text{zusätzlich}} \arrow[r, "+G"] & P_{\text{gesamt}}
\end{tikzcd}$$

$\cdot(1+p\%)$ ← Wachstumsfaktor

1-Schritt

$$200€ \xrightarrow[\substack{\cdot 1{,}06 \\ \cdot(1+6\%)}]{\cdot 106\%} 212€$$

3-Schritt

$$\begin{tikzcd}
200€ \arrow[d, ":100"] & & 212€ \\
2€ \arrow[r, "\cdot 6"] & 12€ \arrow[ur, "\cdot 200€ = G"'] &
\end{tikzcd}$$

$\hat{=} 1\%$ $\hat{=} 6\%$

Aber Entsprechend zurück!!!

$$\boxed{?} \xleftarrow[:(1+6\%)]{:106\%} 212€$$

nur so!

Welche Zahl k erfüllt $k^2 = 2$?

Versuch v	Quadrat v^2	zu klein	zu groß	Wir wissen jetzt
1	1	×		
2	4		×	$1 < k < 2$
1,5	2,25		×	$1 < k < 1{,}5$
1,4	1,96	×		$1{,}4 < k < 1{,}5$
1,45	2,1025		×	
1,41	1,9881	×		
1,42	2,0164		×	$1{,}41 < k < 1{,}42$
1,415	2,0022		×	$1{,}41 < k < 1{,}415$
1,414	1,993	×		$1{,}414 < k < 1{,}415$

⋮ nach Belieben

⋮

1,41421356	1,41421357	×	×	

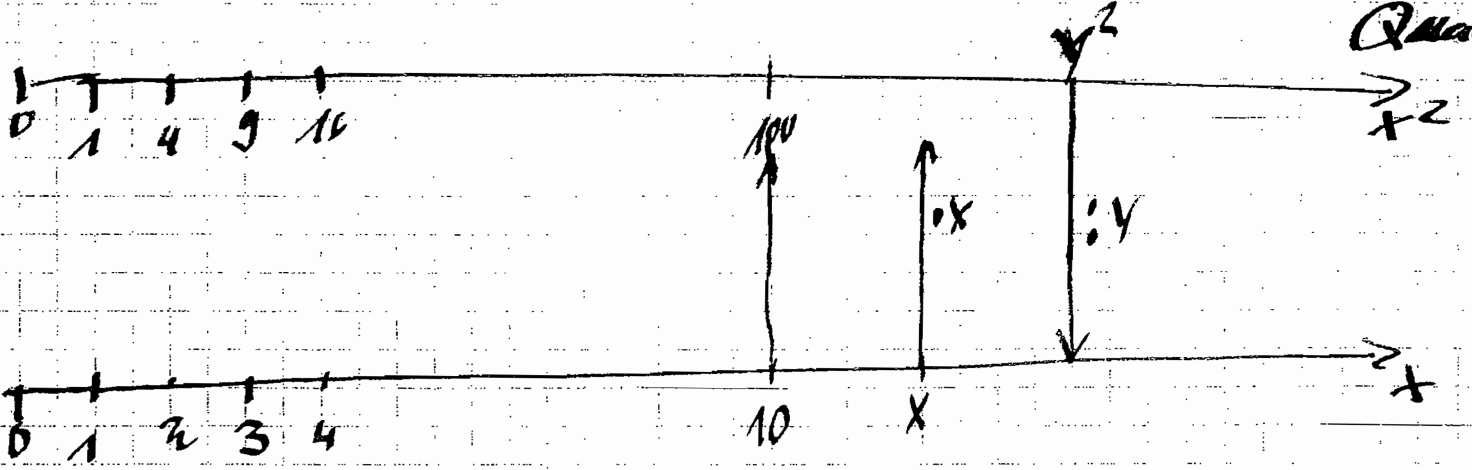
Jetzt andere Probleme lösen.

$k \approx 1{,}414213562$

Ⓣⓡ $\sqrt{2} = k \leftarrow$ später lernen

Heronverfahren

Vorbereitung: Doppelzahlenstrahl:

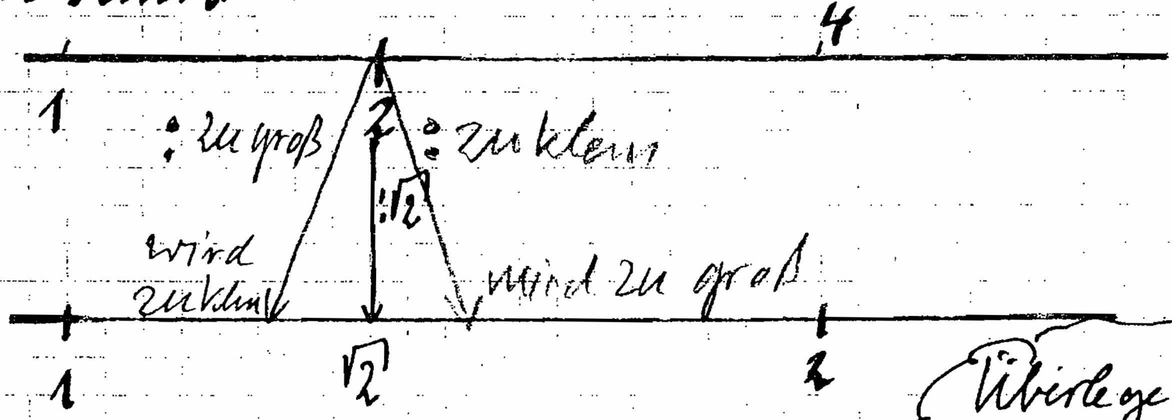


Beobachtung: oben ist die Einteilung nicht gleichmäßig

immer mehr Zahlen zwischen zwei Einträgen

man weiß nicht wo die genau stehen.

Ausschnitt



aber was macht man, wenn man √2 noch nicht kennt?

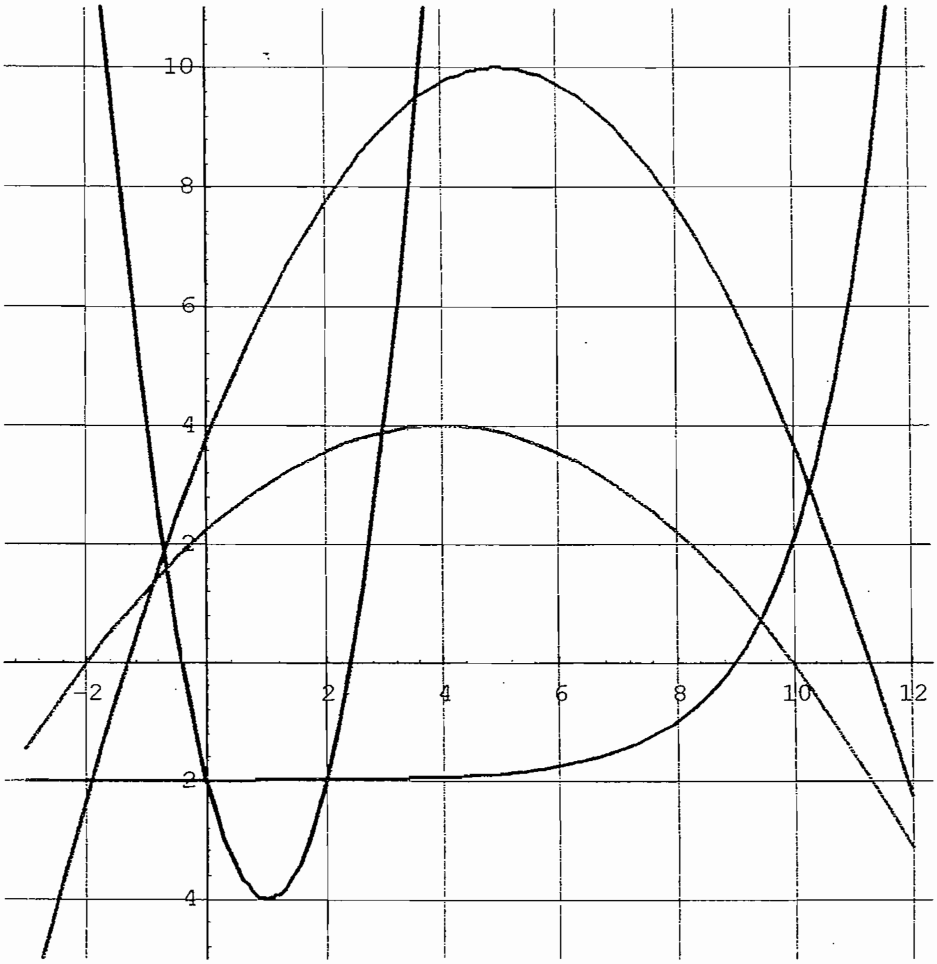
Überlege:
wenn K_{alt} zu klein
$\Rightarrow \frac{2}{K_{alt}}$ zu groß
und umgekehrt

Idee von Heron: Er nimmt als Verbesserung den Mittelwert aus zwei Versuchen

$$K_{neu} = \frac{1}{2}\left(K_{alt} + \frac{2}{K_{alt}} \right)$$

Klasse 10 Übungen mit Funktionsgraphen

Stelle die Funktionsgleichungen auf.
Es sind Parabeln, bis auf die Exponentialfunktion, die die Basis 2 hat.



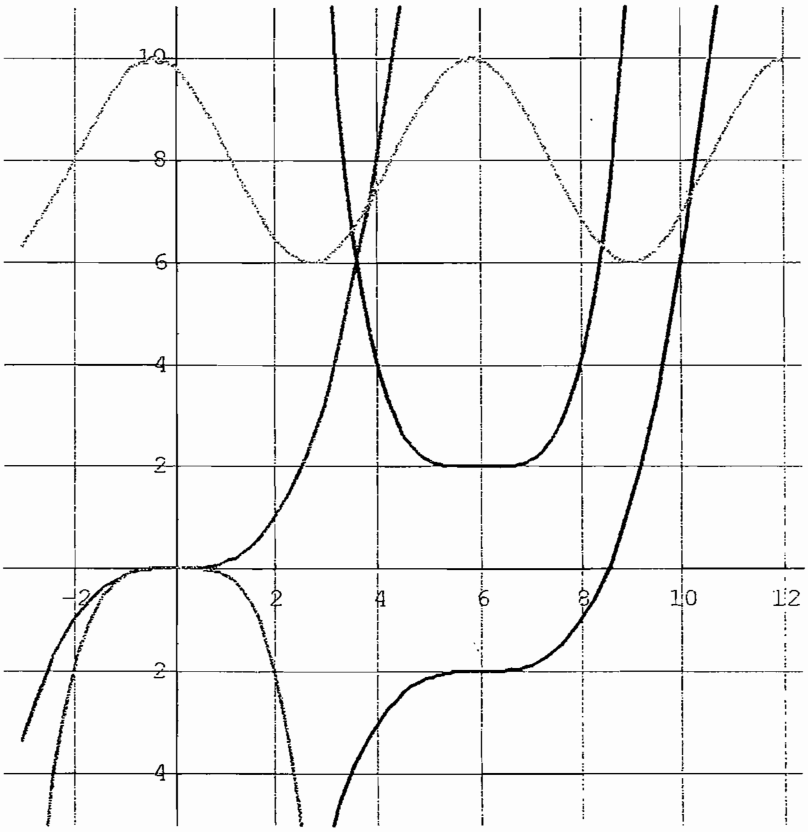
Hier tummeln sich ein Sinus und mehrere Potenzfunktionen.

Zeichne selbst noch ein:

$f(x) = -2\cos(x-2)+4$

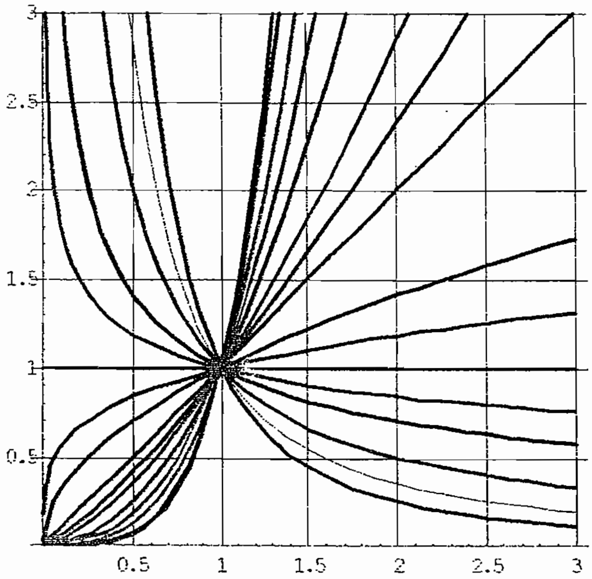
$g(x) = -2(x-2)+4$

$h(x) = -2(x-2)^2+4$

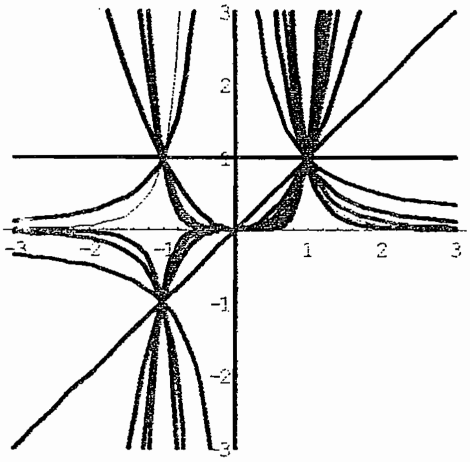


Aufgabe Klasse 10 Potenzfunktionen NAME_______________ Ha, Nov. 98

$$\left\{\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^{7/4}}, \frac{1}{x^{3/2}}, \frac{1}{x^{5/4}}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^{3/4}}, \frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt[4]{x}}, 1, \sqrt[4]{x}, \sqrt{x}, x^{3/4}, x, x^{5/4}, x^{3/2}, x^{7/4}, x^2, x^{9/4}, x^{5/2}, x^{11/4}, x^3, x^{13/4}, x^{7/2}, x^{15/4}, x^4\right\}$$



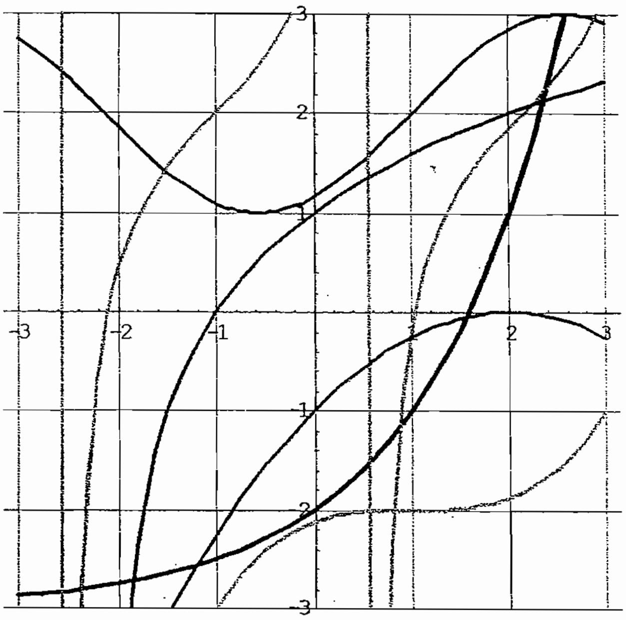
Oben siehst du Funktionsterme für Potenzfunktionen. Welche davon sind hier dargestellt?
Beschrifte sorgfältig, streiche die, die nicht in der Liste dargestellt sind.



Hier sind Potenzfunktionen mit aufeinanderfolgenden ganzzahligen Exponenten dargestellt.
Beschrifte sorgfältig und präge dir den Verlauf ein.

Welche Potenzfunktionen sind hier in verschobener Form darstellt.
Bei den Potenzen und den Verschiebungen kommen nur ganze Zahlen vor. Eine gestauchte Parabel ist dabei.
Rechne bei jedem deiner Vorschläge zur Sicherheit drei Werte nach.

Klassenarbeit Nr.6 Klasse 10 F1 Ha am 29.6.99 Name:



Aufgabe 1

Welche Funktionsgraphen sind hier gezeichnet?

1)______________ 2)______________

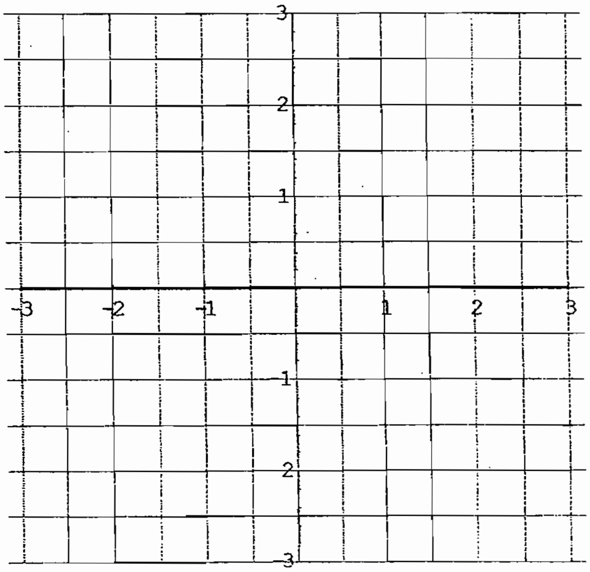
3)______________ 4)______________

5)______________ 6)______________

Zeichne hier unten ein:

$f(x) = \cos(2x)$ $g(x) = \cos(x)+2$

$h(x) = 2\cos(x+1)-1$



Aufgabe 2

Löse die Gleichung $5^{x-2} = 2^{x+1}$.

Mache die Fragestellung der Gleichung an einer qualitativen Skizze deutlich. (Im Heft).

Aufgabe 3

Wo schneiden sich die Parabeln $f(x) = x^2 + x - 2$ und $g(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x-4)$

Beistimme für beide Parabeln die Nullstellen, den Scheitel und die Scheitelgleichung und zeichne mit diesen Erkenntnissen.

Aufgabe 4

Berechne hier: $\log_3 27 =$ $\log_5 \frac{1}{25} =$ $\lg 10^8 =$ $\log_{12} 36 + \log_{12} 4 =$

Fasse zusammen: $2\log_3 x^2 - 4\log_3 x =$ $5\log_4 a - 3\log_4(2a) =$

Berechne (begründet) eine Dezimalzahl: $\text{lb}\ 100$

Gib an, wie man im Kopf herausbekommen kann, zwischen welchen ganzen Zahlen der Wert liegen muss.

C:\Dörte\Mathematik\SEK1Mittelstufe\10logFunktion.wpd

Exponentialfkt – Logarithmus als Umkehrfunktionen voneinander

$y = e^x$ $\quad y = 10^x$ $\quad y = a^x$

$\ln y = x$ $\quad \lg y = x$ $\quad \log_a y = x$

$2{,}71828 = e^1$ $\quad 1000 = 10^3$ $\quad 32 = 2^5$

$\ln 2{,}7128... = 1$ $\quad \lg 1000 = 3$ $\quad \log_2 32 = 5$

$\ln e = 1$ $\quad \lg 10 = 1$ $\quad \log_2 2 = 1$ $\quad \log_a a = 1$

nach Umtausch

$y = \ln x$ $\quad y = \lg x$ $\quad y = \log_a x$

Merke $\quad 7 = \ln e^7$ $\quad 7 = \lg 10^7$ $\quad 7 = \log_a a^7$

Mit dem passenden Logarithmus bekommt man die Exponenten.

$e^y = e^{\ln x}$ $\quad 10^y = 10^{\lg x}$

$e^y = x$ $\quad 10^y = x$

Merke $\quad e^{\ln 7} = 7$ $\quad 10^{\lg 7} = 7$ $\quad 2^{\log_2 7} = 7$

e hoch und ln
10 hoch und lg
a hoch und $\log_a$
} heben sich stets auf, wenn sie direkt aufeinander treffen.

für die Fenke: $\quad u = a^r \quad | \log_a$

$\log_a u = \log_a a^r = r \quad |$ a hoch

$u = a^{\log_a u} = a^r$

Schreibe 1024 als Potenz von 2 ist die eigentliche Aufgabe.

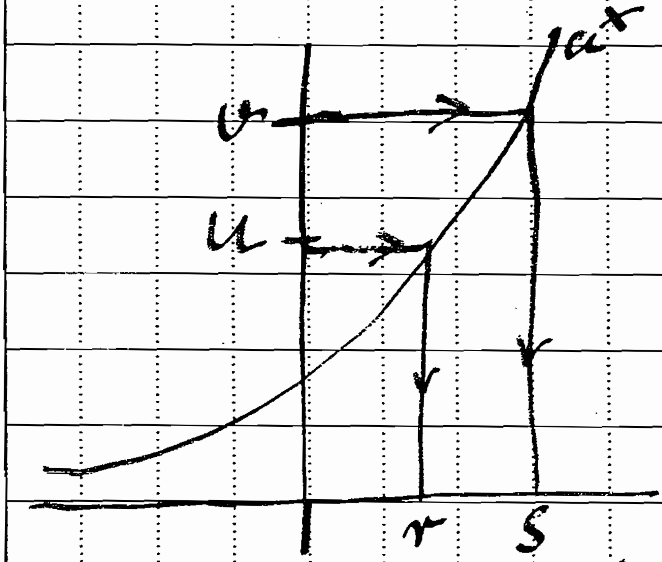
Beispiele $\log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10$

siehe auch hinten → 4 Seit

Herleitung der Logarithmengesetze aus den Potenzgesetzen

I $\log_a(u\cdot v) = ?$	① $a^r\cdot a^s = a^{r+s}$
II $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = ?$	② $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
III $\log_a u^v = ?$	③ $(a^r)^s = a^{r\cdot s}$

für u, v pos$_{I, II}$ bzw u pos bei $\underline{III}$



da der Wertebereich von $f: x \to a^x$ alle positiven Zahlen umfasst, gibt es Zahlen r und s mit

$u = a^r$, $v = a^s$

$\log_a u = r$, $\log_a v = s$

$$\log_a(u\cdot v) = \log_a(a^r\cdot a^s) \overset{①}{=} \log_a(a^{r+s}) = r+s$$

$$= \log_a(u) + \log_a(s)$$

das gilt für jeden Logarithmus, speziell auch für $a=10$: $\lg(u\cdot v) = \lg(u) + \lg(v)$ $\boxed{\log(u\cdot v) = \log u + \log v}$

$$\lg\left(\frac{u}{v}\right) = \lg\left(\frac{10^r}{10^s}\right) \overset{②}{=} \lg 10^{r-s} = r-s = \lg u - \lg v$$

log sei ein allgemeiner Logarithmus $\boxed{\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log u - \log v}$

u positiv, s beliebig → also $\boxed{\log u^s = s \log u}$!

$$\log(u^s) = \log((a^r)^s) \underset{③}{=} \lg(a^{r\cdot s}) = r\cdot s \underset{k}{=} s\cdot r = s\cdot\log(u)$$

mit dem a, das zu log passt

Gleichungen lösen mit Logarithmen.

! lg 9? lg 9 geht nicht. Falle „vereinfacht"

$$19 = 2^x \quad | \lg$$

$$\lg 19 = \lg(2^x) \underset{\text{III}}{=} x \lg 2 \Leftrightarrow x = \frac{\lg 19}{\lg 2} \approx 4{,}248$$

Logarithmengesetz

Es gibt kein Gesetz zu verkürzen!!!

In der Einführungsphase kann man zu den Potenzen, die man im Kopf weiß, auch Logarithmusfragen lösen. Danach nimmt man <u>nur</u> noch lg oder ln für alles.

Im Kopf kann sein Basis 2 Exponent $\{0, \pm 1, \ldots \pm 10\}$

also $\frac{1}{1024} = \frac{1}{2^{10}} = 2^{-10}$ also $\log_2 \frac{1}{1024} = -10$

$\log_2 2^{-10} =$

Basis 3 Exponent $\{0, \pm 1, 2, 3, 4\}$

also 1, 3, 9, 27, 81 und Kehrwerte

Basis 4 Exp. $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ aus der 2-Liste

Basis 5 $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$

also 1, 5, 25, 125, 625 und Kehrwerte

Basis 6 allenfalls noch $216 = 6^3$ sonst nur bis hoch 2

$$1{,}05^{x+3} = 4{,}8 \quad | \lg$$

$$(x+3) \cdot \lg 1{,}05 = \lg 4{,}8$$

$$x + 3 = \frac{\lg 4{,}8}{\lg 1{,}05}$$

$$x = \frac{\lg 4{,}8}{\lg 1{,}05} - 3 = \frac{0{,}68\ldots}{0{,}021\ldots} - 3 = 29{,}15\ldots \approx 29$$

Bei Zwischenrechnungen andeuten nicht runden

Zum Schluss runden

"Umwandlungen mit einer guten Methode

Aufgabe: $\boxed{\text{Schreibe } 2^x \text{ mit Basis} \begin{Bmatrix} 10 \\ e \\ a \end{Bmatrix}}$

$2^x = 10^y \mid \lg$	$2^x = e^y \mid \ln$	$2^x = a^y \mid \lg$
$x \lg 2 = y \lg 10$	$x \ln 2 = y \ln e$	$x \lg 2 = y \lg a$
$x \lg 2 = y$	$x \ln 2 = y$	$x \frac{\lg 2}{\lg a} = y$
Also $2^x = 10^{x \cdot \lg 2}$	Also $2^x = e^{x \ln 2}$	also $2^x = a^{\frac{\lg 2}{\lg a} \cdot x}$

$\uparrow$ ebenso mit l

Methode: "Nutze $2 = 10^{\lg 2} = e^{\ln 2}$ "

$$2^x = \left(10^{\lg 2}\right)^x \underset{\text{(III)}}{=} 10^{x \cdot \lg 2}$$

$$2^x = \left(e^{\ln 2}\right)^x \underset{\text{(III)}}{=} e^{x \cdot \ln 2}$$

Regel aus Formelsammlung Basiswechsel $\boxed{b^x = a^{\frac{\lg b}{\lg a} \cdot x}}$

bloß nicht lernen, lohnt nicht

Aufgabe: $\boxed{\text{Berechne } y = \log_a x}$ $\mid a^{\text{hoch}}$

Beispiel aus Schulbuch

$\log_7 343 = ?$

Entweder raten $343 = 7^{\boxed{?}}$

$\log_7 7^3 = 3$

oder berechnen

$\log_7 343 = y \mid 7^{\text{hoch}}$

$343 = 7^y \mid \lg$

$\lg 343 = y \cdot \lg 7$

$y = \frac{\lg 343}{\lg 7} = 3$

$a^y = a^{\log_a x} = x \mid \lg$

$\uparrow$ Umkehrfkt.

$\lg(a^y) = \lg x$

$y \cdot \lg a = \lg x$

$y = \frac{\lg x}{\lg a}$

in Formel:

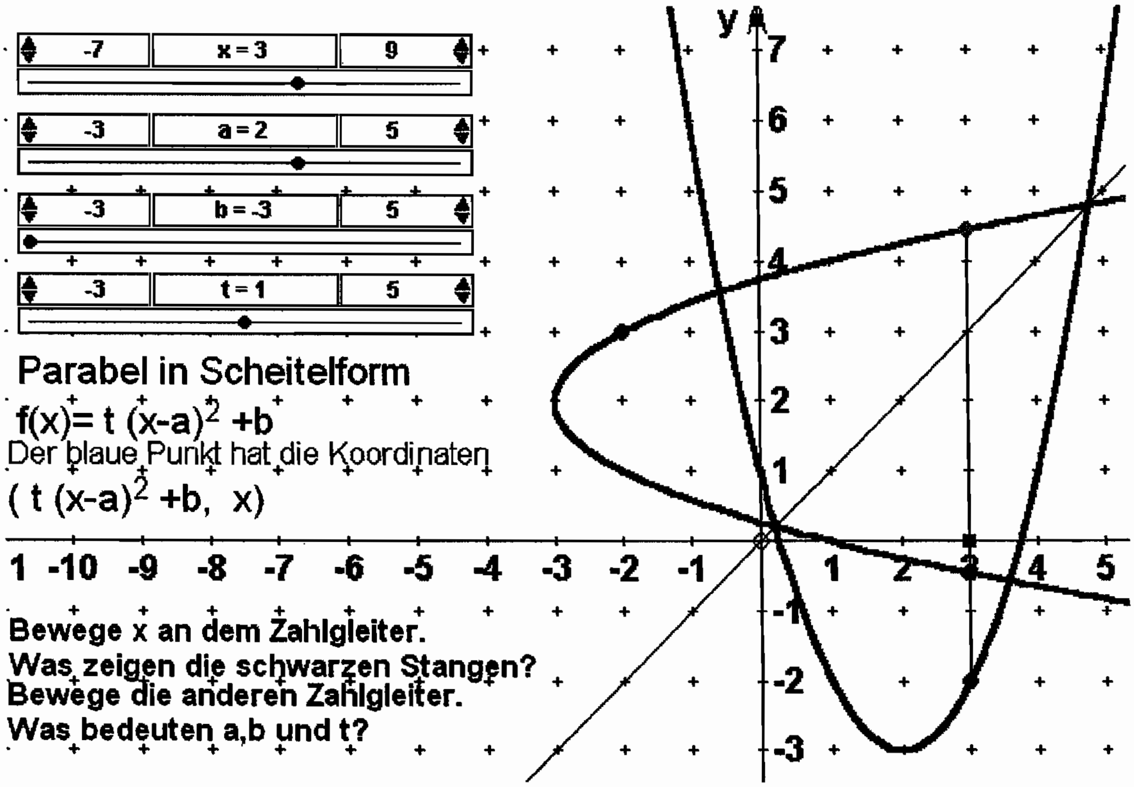
$$\boxed{\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

nicht lernen, ◄— machen!

Umkehr-Funktionen und Umkehr-Relationen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 12. Juli 2004

In Eulid-Dynageo (und allen Werkzeugen, die eine Koordinaten-Eingabe vorsehen, auch Excel) kann man zur Erzeugung der Umkehr-Relation zur Funktion f statt (x,f(x)) einfach (f(x),x) eingeben. Hier durch den roten Punkz auf der Parabel und dem blauen Punkt auf der Wurzelrelation dargestellt. Die beiden Punkte an der Stelle x (orange und lila) entstehen durch durch wirkliche Wurzel-Funktions-Äste.



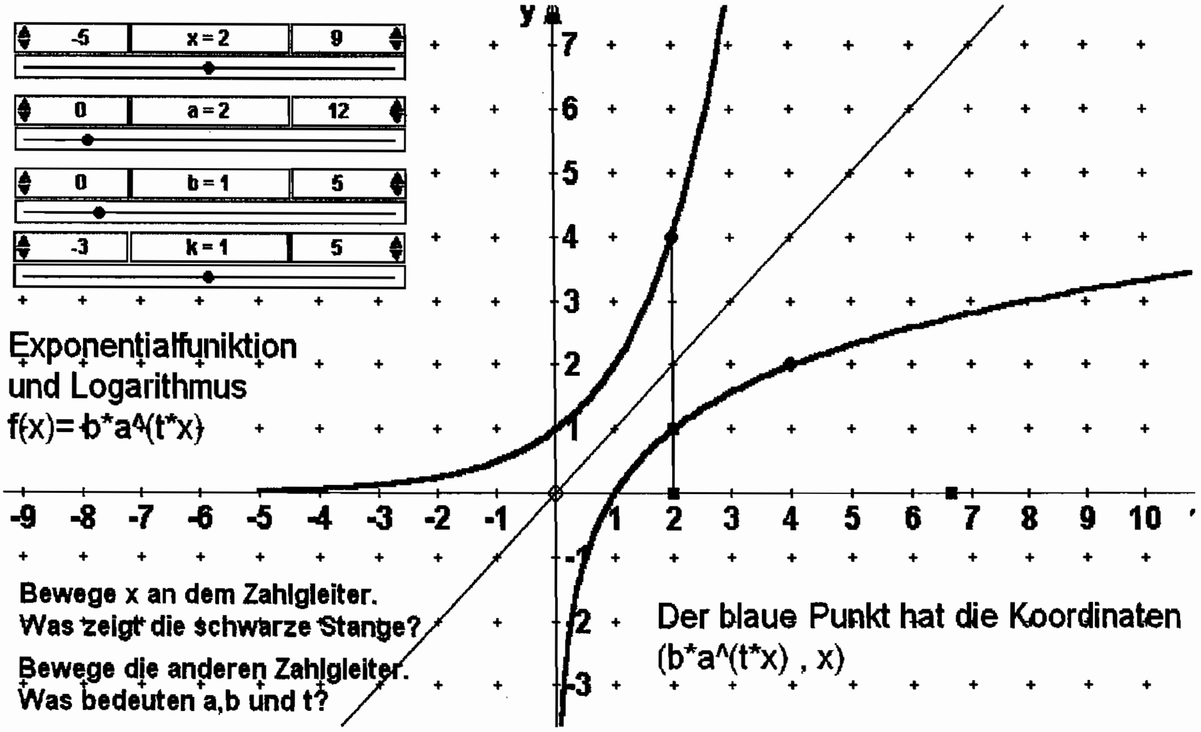
Parabel in Scheitelform

$f(x)= t\ (x-a)^2 +b$

Der blaue Punkt hat die Koordinaten

$(t\ (x-a)^2 +b,\ \ x)$

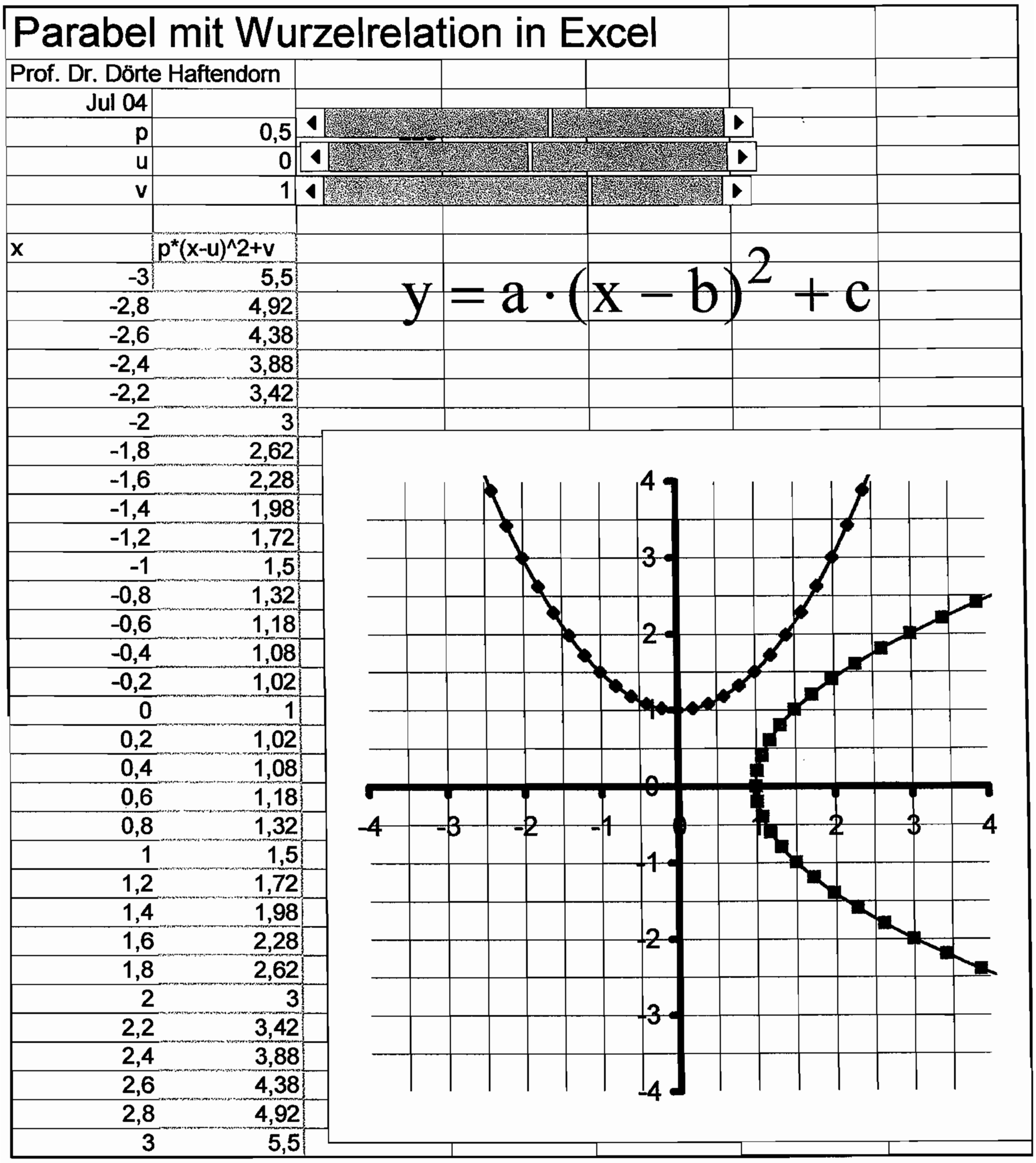
Bewege x an dem Zahlgleiter.
Was zeigen die schwarzen Stangen?
Bewege die anderen Zahlgleiter.
Was bedeuten a,b und t?



Exponentialfuniktion
und Logarithmus
f(x)= b*a^(t*x)

Bewege x an dem Zahlgleiter.
Was zeigt die schwarze Stange?
Bewege die anderen Zahlgleiter.
Was bedeuten a,b und t?

Der blaue Punkt hat die Koordinaten
(b*a^(t*x) , x)



Parabel mit Wurzelrelation in Excel

Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Jul 04

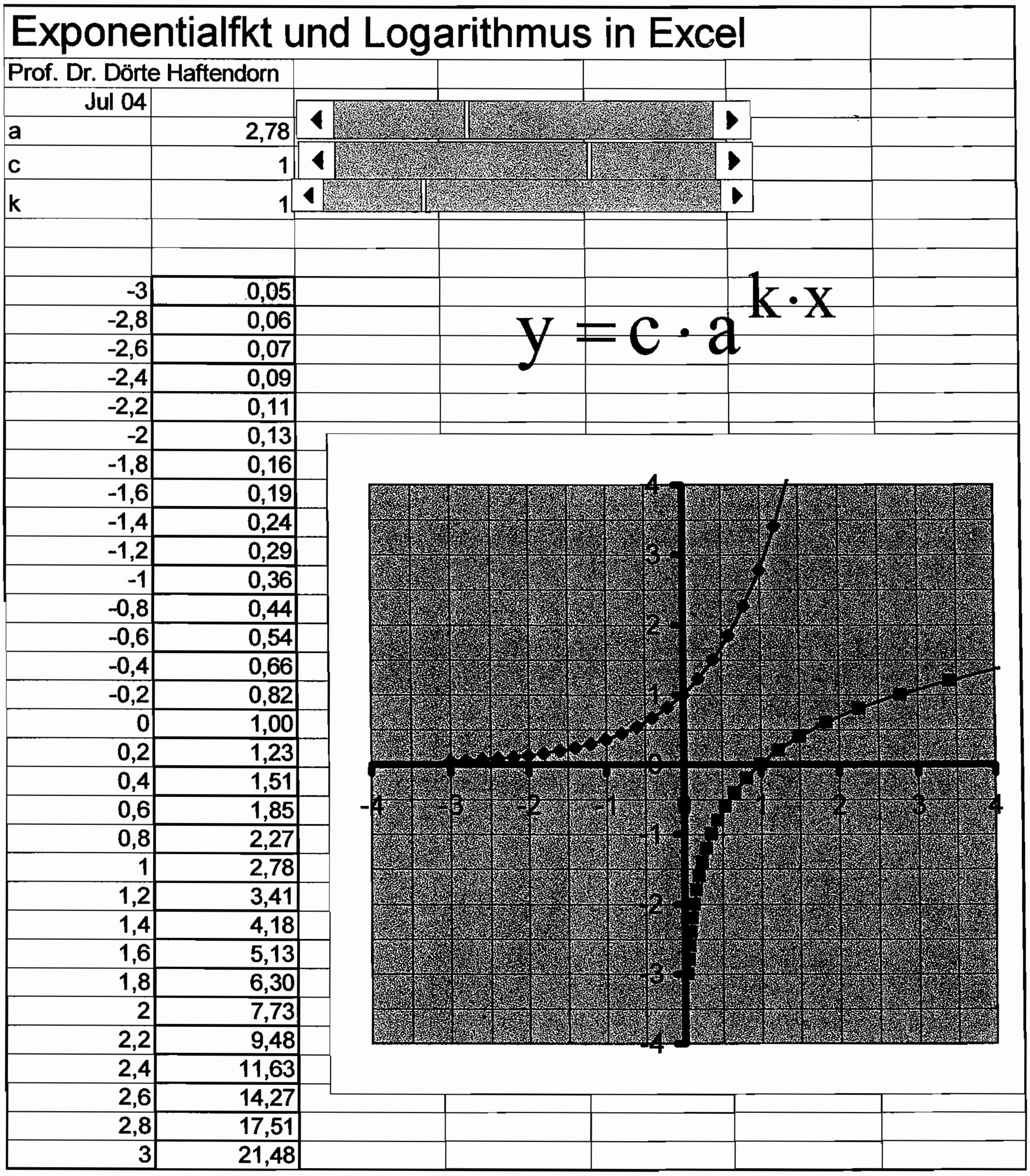
p 0,5

u 0

v 1

$$y = a \cdot (x - b)^2 + c$$

x	p*(x-u)^2+v
-3	5,5
-2,8	4,92
-2,6	4,38
-2,4	3,88
-2,2	3,42
-2	3
-1,8	2,62
-1,6	2,28
-1,4	1,98
-1,2	1,72
-1	1,5
-0,8	1,32
-0,6	1,18
-0,4	1,08
-0,2	1,02
0	1
0,2	1,02
0,4	1,08
0,6	1,18
0,8	1,32
1	1,5
1,2	1,72
1,4	1,98
1,6	2,28
1,8	2,62
2	3
2,2	3,42
2,4	3,88
2,6	4,38
2,8	4,92
3	5,5



Exponentialfkt und Logarithmus in Excel

Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Jul 04

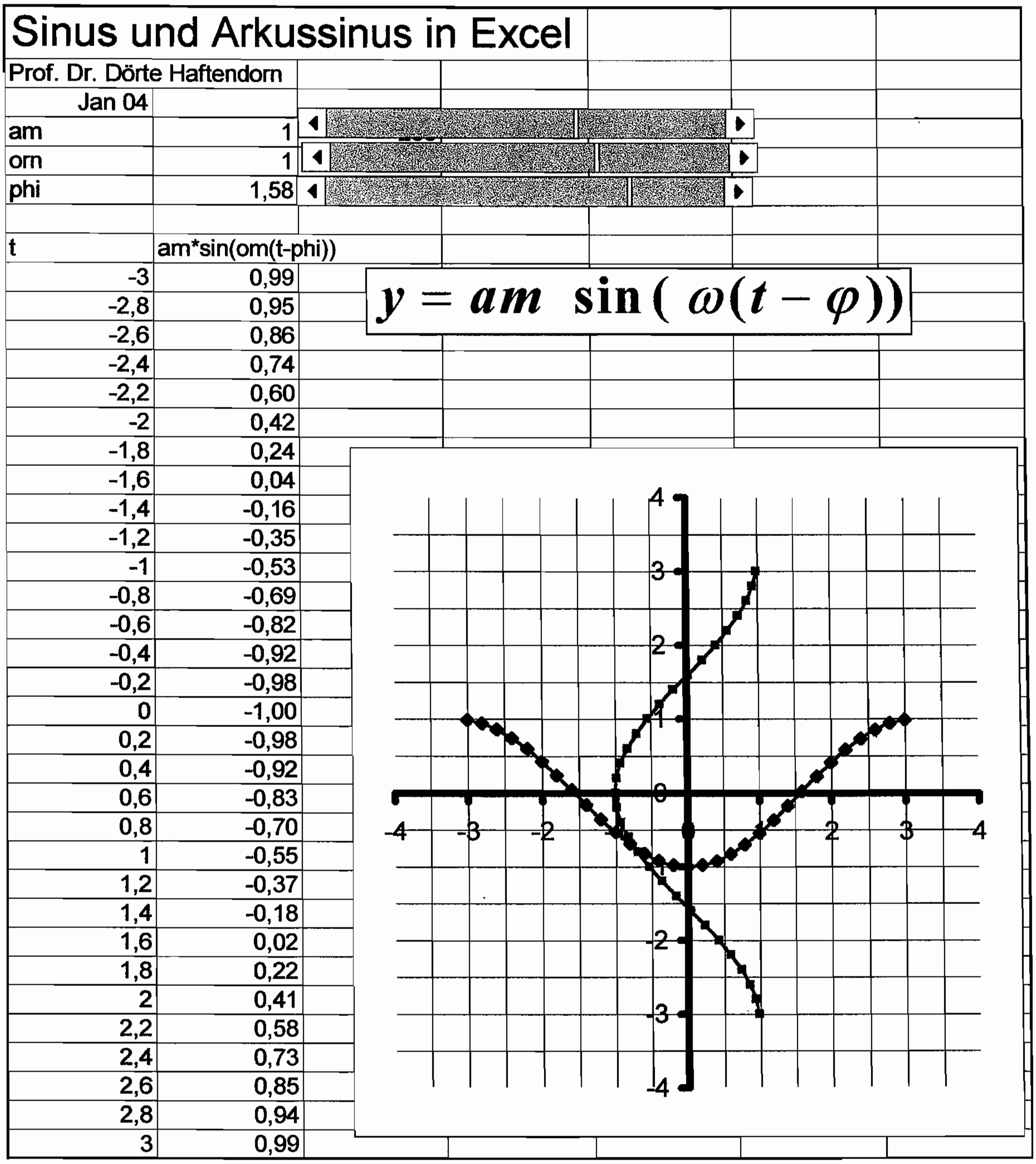
a 2,78

c 1

k 1

$$y = c \cdot a^{k \cdot x}$$

-3	0,05
-2,8	0,06
-2,6	0,07
-2,4	0,09
-2,2	0,11
-2	0,13
-1,8	0,16
-1,6	0,19
-1,4	0,24
-1,2	0,29
-1	0,36
-0,8	0,44
-0,6	0,54
-0,4	0,66
-0,2	0,82
0	1,00
0,2	1,23
0,4	1,51
0,6	1,85
0,8	2,27
1	2,78
1,2	3,41
1,4	4,18
1,6	5,13
1,8	6,30
2	7,73
2,2	9,48
2,4	11,63
2,6	14,27
2,8	17,51
3	21,48



Sinus und Arkussinus in Excel

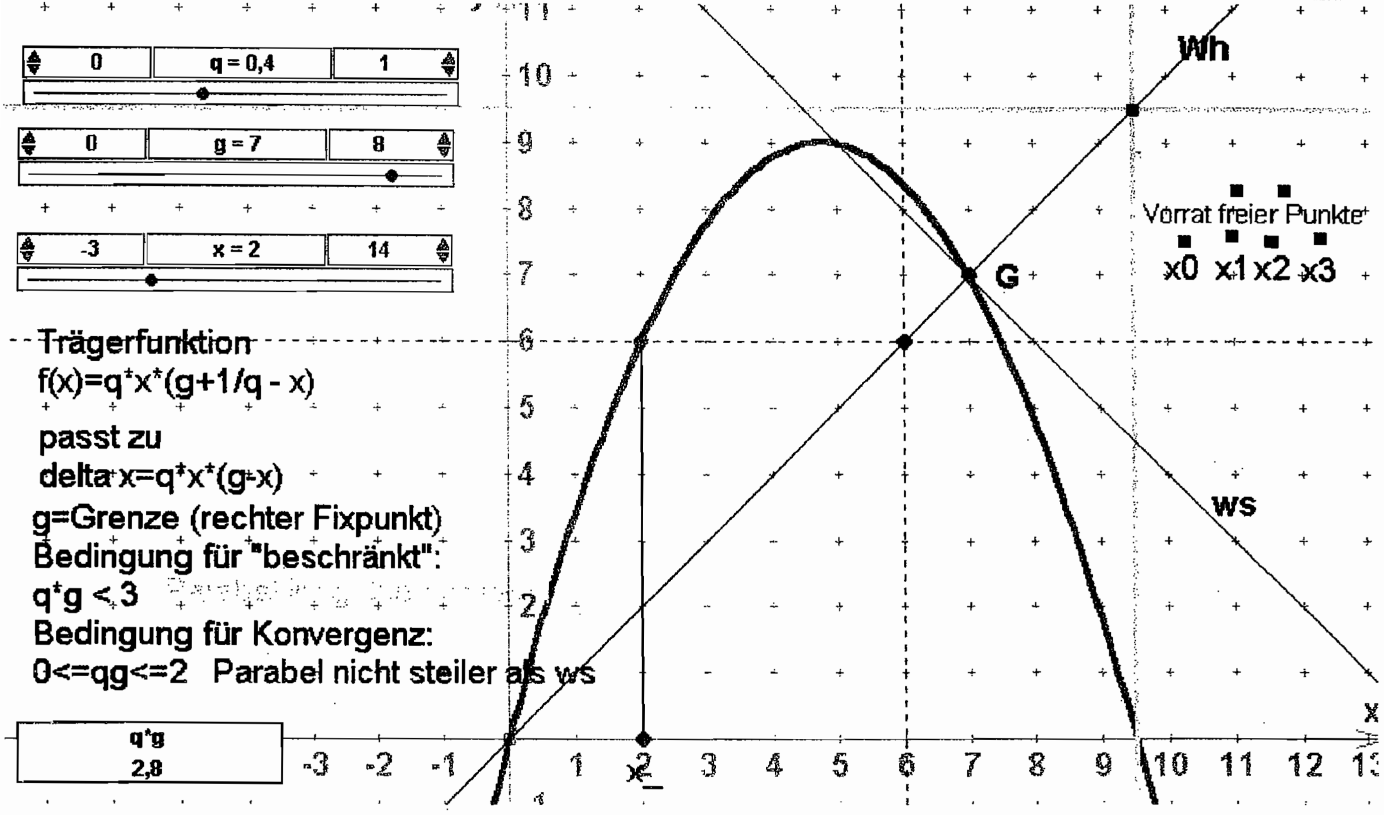
Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Jan 04

am	1
om	1
phi	1,58

$$y = am\ \sin(\omega(t-\varphi))$$

t	am*sin(om(t-phi))
-3	0,99
-2,8	0,95
-2,6	0,86
-2,4	0,74
-2,2	0,60
-2	0,42
-1,8	0,24
-1,6	0,04
-1,4	-0,16
-1,2	-0,35
-1	-0,53
-0,8	-0,69
-0,6	-0,82
-0,4	-0,92
-0,2	-0,98
0	-1,00
0,2	-0,98
0,4	-0,92
0,6	-0,83
0,8	-0,70
1	-0,55
1,2	-0,37
1,4	-0,18
1,6	0,02
1,8	0,22
2	0,41
2,2	0,58
2,4	0,73
2,6	0,85
2,8	0,94
3	0,99



0 q = 0,4 1

0 g = 7 8

-3 x = 2 14

Trägerfunktion
$f(x)=q*x*(g+1/q - x)$
passt zu
delta $x=q*x*(g-x)$
g=Grenze (rechter Fixpunkt)
Bedingung für "beschränkt":
$q*g < 3$
Bedingung für Konvergenz:
$0<=qg<=2$ Parabel nicht steiler als ws

q*g 2,8

Nutzen dieser Euklid-Dynageo-Datei:

A. Erklärung der Treppchendarstellung (Spinnweb~).
B. Erkundung der Wirkung von q bei festem g.
C. Erkundung der Wirkung von g bei festem q.
D. Bestätigung der links unten genannten Bedingungen für qg.
E. Überlegungen warum die Konvergenzbedingung so sein muss.
F. In Analysis kann diese Bedingung errechnet werden.
G. Überlegungen warum die Beschränktheitsbedingung so sein muss.
H. Diese Bedingung kann auch in der Sek I errechnet werden.(Ebenso die folgenden B.)
I. Erkundung einer Bedingung für monotones Wachstum der Folge.
J. Erkundung, wann die Folge gegen 0 strebt.

Hinweise:

zu A) Wähle am x-Regler einen Startwert, hier 2, setze den freien Punkt x0 auf x_.(* Verfolge die Striche zur Funktion, zur y-Achse, die graphische Spiegelung an der Wh, setze dort x1 hin. Setze mit dem Regler x- auf x1.*) Wiederhole(*....*) mit x2,x3 ...

zu E) Die Steigung im Fixpunkt muss betragsmäßig kleiner 1 sein (siehe Vorübungen mit Geraden).

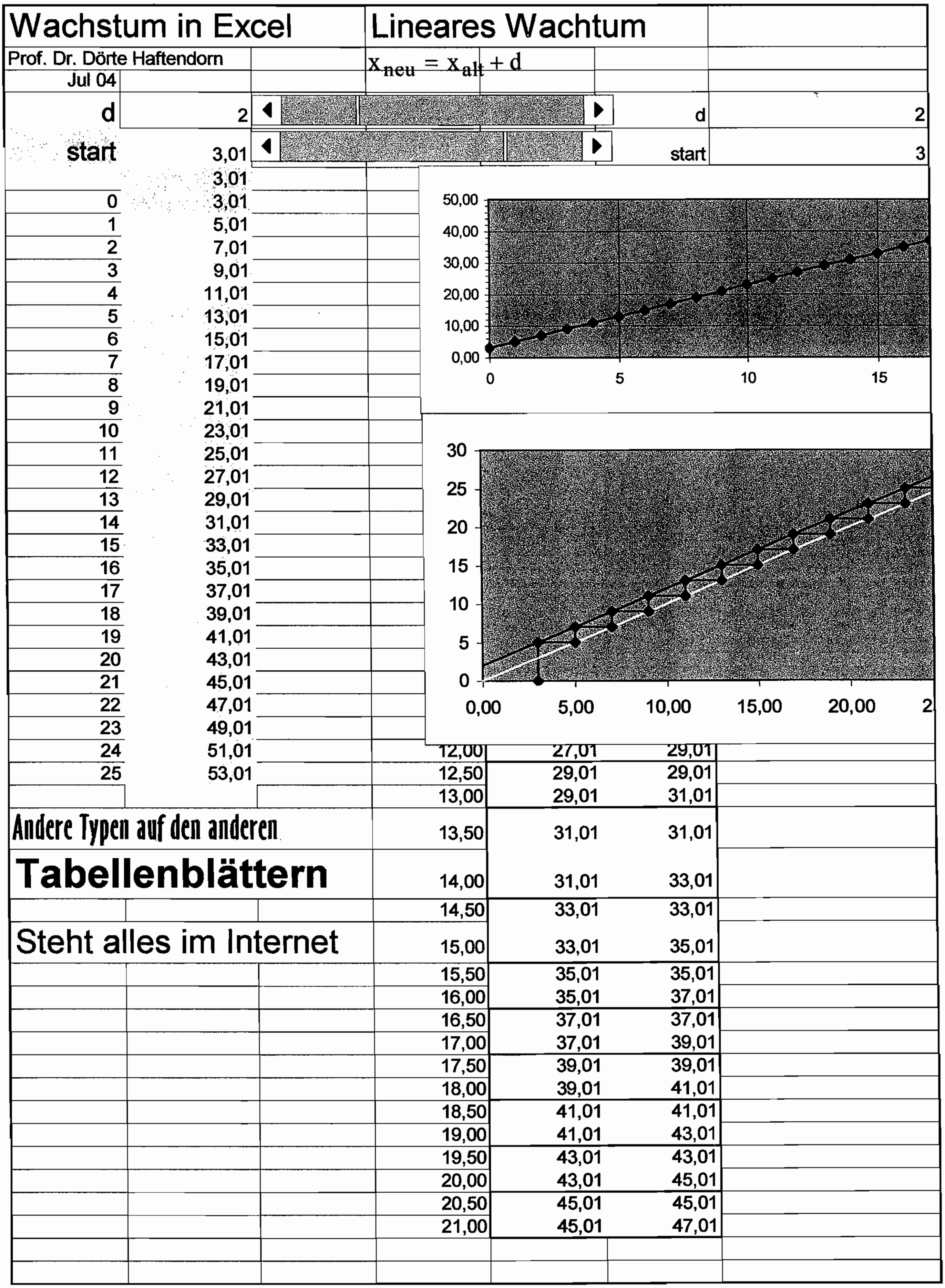
zu F) Die Ableitung der Trägerfunktion ist an der Stelle g auf -1 zu setzen. Daraus ist qg zu bestimmen.

zu G) Der Bereich (grün) ist durch die Nullstelle bestimmt. Wenn der Scheitel der Parabel oben hinauswandert, kommen Folgenglieder zustande, die auf der x-Achse rechts von der Nullstelle liegen. Dann wird der nächtse Wert negativ und die Folge strebt gegen -unendlich

zu H) Die Nullstelle ist bei g+1/q und die Scheitelstelle auf der Hälfte. Der Scheitelwert muss kleiner als g+1/q sein.

zu I) Die Folge wächst ausschließlich, wenn die Steigung in G nicht negativ ist.

zu J) Die Folge stebt gegen 0, wenn g<=0 ist.



Wachstum in Excel		Lineares Wachtum		
Prof. Dr. Dörte Haftendorn		$x_{neu} = x_{alt} + d$		
Jul 04				
d	2		d	2
start	3,01		start	3

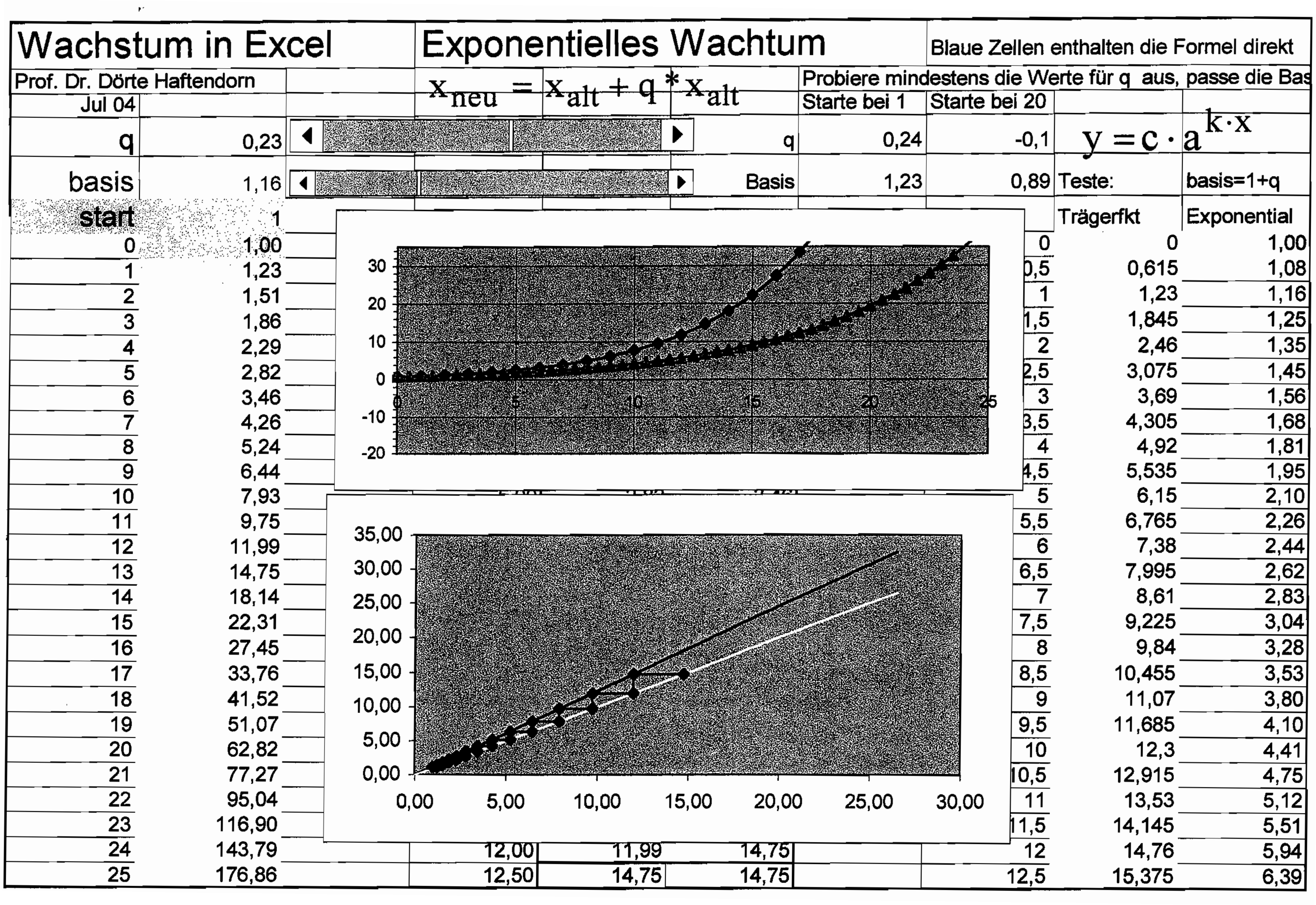
	3,01
0	3,01
1	5,01
2	7,01
3	9,01
4	11,01
5	13,01
6	15,01
7	17,01
8	19,01
9	21,01
10	23,01
11	25,01
12	27,01
13	29,01
14	31,01
15	33,01
16	35,01
17	37,01
18	39,01
19	41,01
20	43,01
21	45,01
22	47,01
23	49,01
24	51,01
25	53,01

Andere Typen auf den anderen

Tabellenblättern

Steht alles im Internet

12,00	27,01	29,01
12,50	29,01	29,01
13,00	29,01	31,01
13,50	31,01	31,01
14,00	31,01	33,01
14,50	33,01	33,01
15,00	33,01	35,01
15,50	35,01	35,01
16,00	35,01	37,01
16,50	37,01	37,01
17,00	37,01	39,01
17,50	39,01	39,01
18,00	39,01	41,01
18,50	41,01	41,01
19,00	41,01	43,01
19,50	43,01	43,01
20,00	43,01	45,01
20,50	45,01	45,01
21,00	45,01	47,01



Wachstum in Excel

Exponentielles Wachtum

Blaue Zellen enthalten die Formel direkt

Prof. Dr. Dörte Haftendorn

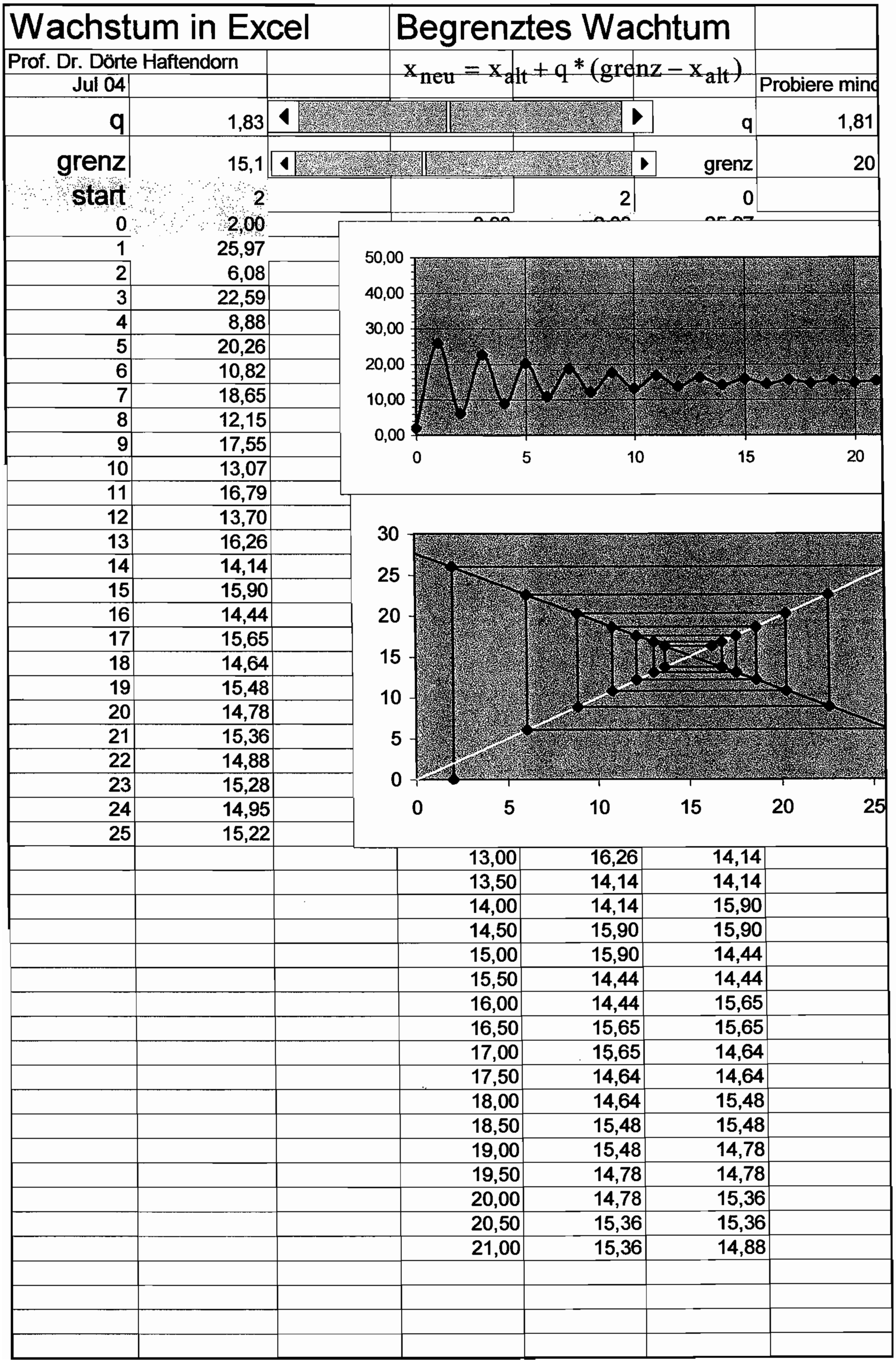
Jul 04

$x_{neu} = x_{alt} + q * x_{alt}$

Probiere mindestens die Werte für q aus, passe die Bas

			Starte bei 1	Starte bei 20	$y = c \cdot a^{k \cdot x}$
q	0,23	q	0,24	-0,1	
basis	1,16	Basis	1,23	0,89	Teste: basis=1+q
start	1				

								Trägerfkt	Exponential
0	1,00						0	0	1,00
1	1,23						0,5	0,615	1,08
2	1,51						1	1,23	1,16
3	1,86						1,5	1,845	1,25
4	2,29						2	2,46	1,35
5	2,82						2,5	3,075	1,45
6	3,46						3	3,69	1,56
7	4,26						3,5	4,305	1,68
8	5,24						4	4,92	1,81
9	6,44						4,5	5,535	1,95
10	7,93						5	6,15	2,10
11	9,75						5,5	6,765	2,26
12	11,99						6	7,38	2,44
13	14,75						6,5	7,995	2,62
14	18,14						7	8,61	2,83
15	22,31						7,5	9,225	3,04
16	27,45						8	9,84	3,28
17	33,76						8,5	10,455	3,53
18	41,52						9	11,07	3,80
19	51,07						9,5	11,685	4,10
20	62,82						10	12,3	4,41
21	77,27						10,5	12,915	4,75
22	95,04						11	13,53	5,12
23	116,90						11,5	14,145	5,51
24	143,79		12,00	11,99	14,75		12	14,76	5,94
25	176,86		12,50	14,75	14,75		12,5	15,375	6,39



Wachstum in Excel

Begrenztes Wachtum

Prof. Dr. Dörte Haftendorn

Jul 04

$x_{neu} = x_{alt} + q * (grenz - x_{alt})$

Probiere mind

q	1,83	q	1,81
grenz	15,1	grenz	20
start	2	2	0

0	2,00
1	25,97
2	6,08
3	22,59
4	8,88
5	20,26
6	10,82
7	18,65
8	12,15
9	17,55
10	13,07
11	16,79
12	13,70
13	16,26
14	14,14
15	15,90
16	14,44
17	15,65
18	14,64
19	15,48
20	14,78
21	15,36
22	14,88
23	15,28
24	14,95
25	15,22

13,00	16,26	14,14
13,50	14,14	14,14
14,00	14,14	15,90
14,50	15,90	15,90
15,00	15,90	14,44
15,50	14,44	14,44
16,00	14,44	15,65
16,50	15,65	15,65
17,00	15,65	14,64
17,50	14,64	14,64
18,00	14,64	15,48
18,50	15,48	15,48
19,00	15,48	14,78
19,50	14,78	14,78
20,00	14,78	15,36
20,50	15,36	15,36
21,00	15,36	14,88

Wachstum in Excel

Logistisches Wachtum

Prof. Dr. Dörte Haftendorn
Jul 04

$$x_{neu} = x_{alt} + q * x_{alt} * (grenz - x_{alt})$$

Blaue Zellen enthalten die Formel direkt
Probiere mindestens die Werte für q und grenz aus.

q	0,131	◀ ▶	q	0,21	0,81	1,09	1,39	1,51
grenz	20	◀ ▶	grenz	20	20	20	20	20

start	0,5	2,62							Bewege dann grenz nach u
0	0,50	q*grenz							besonders beachten
1	1,78								grenz 15,5 bis 16,6
2	6,02								
3	17,04								
4	23,64								
5	12,36								
6	24,73								q*grenz
7	9,41								bestimmt das Verhalten
8	22,46								Für welche Werte
9	15,22								liegt Konvergenz vor?
10	24,75								Für welche Werte
11	9,35								liget Beschränktheit vor?
12	22,39								
13	15,38								
14	24,69								
15	9,52								
16	22,59								
17	14,92								
18	24,85								
19	9,07								
20	22,05								
21	16,12								
22	24,31								
23	10,58		11,50	17,37	17,37		11,5	24,30525	
24	23,63		12,00	17,37	23,35		12	24,576	
25	12,39		12,50	23,35	23,35		12,5	24,78125	
			13,00	23,35	13,10		13	24,921