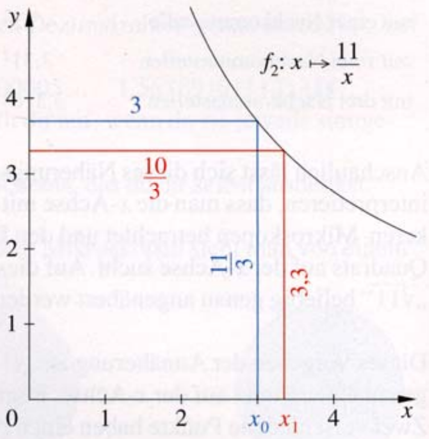
Vergleichen Sie diese Vorgehenweisen mit der in Analysis 1 vorstellten Methode der rekursiven Darstellung mit den Spinnwebgraphen. (Ha 2011)

Einen Schritt weitergedacht: Es würde langes, mühsames Probieren erfordern, z. B. den von einem Schultaschenrechner angezeigten Näherungswert **3,31662479** für $\sqrt{11}$ mithilfe von Doppelungleichungen zu ermitteln. Es geht aber auch viel schneller. Betrachte dazu nochmal den Auftrag für $f_2\colon x \mapsto \frac{11}{x}$.

Wählt man $x_0 = 3$ als Näherungswert für $\sqrt{11}$, so erhält man unter dem Graphen von f_2 kein Quadrat, sondern ein Rechteck (blau gezeichnet), dessen eine Seite mit der Länge **3** zu kurz, die andere dafür mit $\frac{11}{3}$ zu lang ist. Folglich muss das arithmetische Mittel x_1 der beiden Seitenlängen, ein besserer Näherungswert für $\sqrt{11}$ sein.



$x_1 = \left(x_0 + \frac{11}{x_0}\right) : 2 = \left(3 + \frac{11}{3}\right) : 2 = \frac{10}{3}$

Wegen $x_1{}^2 = \frac{100}{9} > 11$ ist x_1 zu groß und deshalb $\frac{11}{x_1} = \frac{33}{10} = 3{,}3$ zu klein.

Wiederum muss deshalb das arithmetische Mittel x_2 dieser beiden Werte eine bessere Näherung sein. $x_2 = \left(\frac{10}{3} + \frac{33}{10}\right) : 2 = \frac{199}{60} \approx \mathbf{3{,}31667}$

Dieser Wert lässt sich nicht mehr im Bild einzeichnen, da er sich bei der gewählten Linienstärke nicht von x_1 unterscheidet. Er stimmt bereits bis zur 4. Nachkommastelle mit der Dezimalzahl für $\sqrt{11}$ überein.
Berechnet man nun wieder das arithmetische Mittel von x_2 und $\frac{11}{x_2}$, so erhält man mit $x_3 \approx \mathbf{3{,}31662479}$ bereits den Taschenrechnerwert für $\sqrt{11}$.

Dieses Verfahren, das in der Mathematik als **Heron-Verfahren** bekannt ist, liefert also nach nur wenigen Schritten recht genaue Näherungswerte für Quadratwurzeln. Das Heron-Verfahren ist ein sogenanntes **Iterationsverfahren**, d. h. dieselben Rechenoperationen wiederholen sich bei jedem Schritt:
Soll ein Näherungswert für $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ berechnet werden, so wählt man irgendeinen **Startwert** $x_0 > 0$. Dann rechnet man immer wieder nach demselben Schema:

$$x_1 = \left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) : 2 \qquad x_2 = \left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) : 2 \qquad \ldots \qquad x_n = \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) : 2$$

Man hört auf, wenn sich x_n und $\frac{a}{x_n}$ um weniger als die gewünschte Genauigkeit unterscheiden.

Die Ausführung der immer gleichen Rechenoperationen kann leicht an einen Computer delegiert werden (s. Zusammenfassung). Rechnest du aber ohne Computer-Hilfe, darfst du dich auch mal verrechnen – sogar mehrmals! Auch dann kommst du (vielleicht etwas später) zum gewünschten Näherungswert für $\sqrt{a}$.