# Das Halteproblem, Entscheidbarkeit:

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, MuPAD 4, Jan. 07 Update 07
Web: http://haftendorn.uni-lueneburg.de www.mathematik-verstehen.de

++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

**Die "Collatz-Folge" oder "3n+1-Folge" ist geeignet, einige grundlegende Erkenntnisse zum Halteproblem und zur Entscheidbarkeit anzuregen:**
**Starte mit n.**

$$a_{i+1} := \begin{cases} \dfrac{a_i}{2} & \text{für gerade } a_i \\ 3 \cdot a_i + 1 & \text{für ungerade } a_i \end{cases}$$

```
f:=proc(n)
      local s;
     begin
      s:=[n];
      while n>1 do
        if (n mod 2)=0 then
         n:=n div 2;
        else
         n:=3*n+1;
        end_if;
        s:=s.[n];
      end_while;
      //print(s,nops(s));
      return( s);
     end_proc:
```

**Ausgabe-Version**

```
fpr:=proc(n)
     local s;
    begin
     s:=[n];
     while n>1 do
       if (n mod 2)=0 then
        n:=n div 2;
       else
        n:=3*n+1;
       end_if;
       s:=s.[n];
     end_while;
     print(s,nops(s));
     //return( s);
    end_proc:
```

Angegeben wird die Folge als Liste und deren Elementezahl.

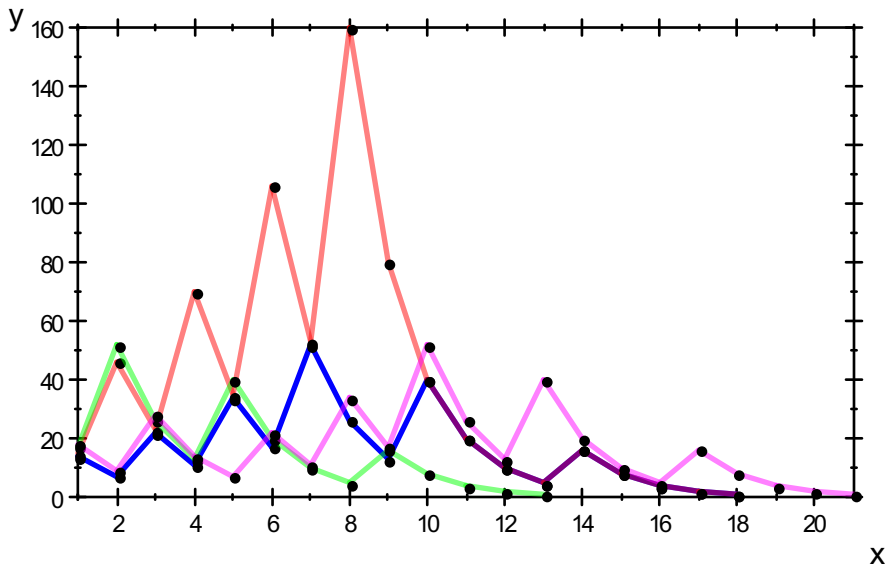
```
fpr(k) $ k=3..20
[3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1], 8
[4, 2, 1], 3
[5, 16, 8, 4, 2, 1], 6
[6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1], 9
[7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2,
1], 17
[8, 4, 2, 1], 4
[9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5,
16, 8, 4, 2, 1], 20
[10, 5, 16, 8, 4, 2, 1], 7
[11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1], 15
[12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1], 10
[13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1], 10
[14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8,
4, 2, 1], 18
[15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16,
8, 4, 2, 1], 18
[16, 8, 4, 2, 1], 5
[17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1], 13
[18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10,
5, 16, 8, 4, 2, 1],

   21
[19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20,
10, 5, 16, 8, 4, 2, 1],

   21
[20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1], 8
```

Erstaunlicherweise dauert es sehr verschieden lange bis 1 erreicht wird.
Und 1 wird hier immer erreicht.

---

Visualisierung:

```
plot(plot::Listplot(f(14)),
     plot::Listplot(f(15), LineColor=[1,0,0,0.5]),
     plot::Listplot(f(17), LineColor=[0,1,0,0.5]),
     plot::Listplot(f(18), LineColor=[1,0,1,0.5]),
     LineWidth=0.8);
```

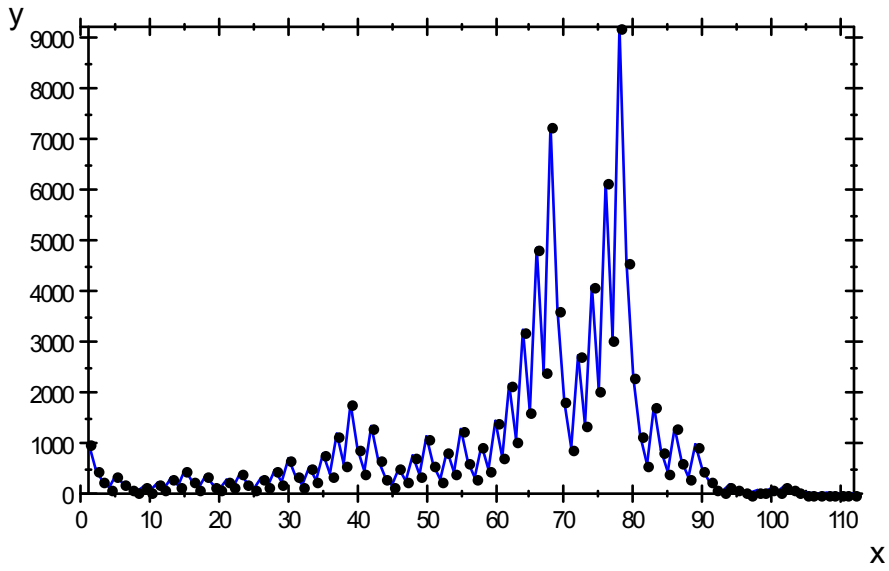



Die Folgen, die dicht beieinander starten entwickeln sich dennoch ganz verschieden.

---

Test für eine große Zahl:

```
plot(plot::Listplot(f(1000)));
```




Mit Ansicht der Folgenglieder:
Nachdem schon ganz bescheidene Größe erreicht war (47) geht es nochmal richtig in die Höhe.

```
fpr(1000);
[1000, 500, 250, 125, 376, 188, 94, 47, 142, 71, 214, 107,
322, 161, 484, 242,

   121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155,
466, 233, 700, 350,

   175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445,
```

```
1336, 668, 334, 167,

   502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638,
319, 958, 479,

   1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288,
3644, 1822, 911, 2734,

   1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154,
577, 1732, 866, 433,

   1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23,
70, 35, 106, 53,

   160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1], 112
```

In der Schlussphase kommt 46 vor statt 47, danach ist es bald zuende.

```
plot(plot::Listplot(f(27)),plot::Listplot(f(1000),LineColor=
```

##########################################################################
#######

Was lehrt dieses Beispiel:
Durch Hinsehen und Beobachten kann man nicht entscheiden, ob die Folge auf 1 zuläuft oder nicht, ob also das
Programm anhält oder nicht.
Was man sonst noch weiß:
Es ist noch keine Startzahl gefunden worden, bei der 1 nicht erreicht wird.
Es hat noch niemand beweisen können, dass immer 1 erreicht wird.
Die mathematische Analyse **des Programms** zeigt nur die Umsetzung der Definition, sonst nichts.
Eine irgenwie geartete "softwaremäßige Anlalyse" , die das Halteproblem für dieses Programm entscheiden kann, müsste da viel mehr leisten, als die Mathematiker bis jetzt geschafft haben.
Dafür haben die Mathematiker aber folgendes bewiesen:

**Es kann keinen Algorithmus geben, der das sogenannte "Halteproblem" löst.**

Hiermit ein Programm gemeint, das **für alle** vorgelegten Programme und alle zulässigen Eingaben über deren Anhalten entscheiden kann.

**Beweis** (indirekt): HP sei so ein Programm, das das Halteproblem löst. Dann baut man um HP ein Programm K, dass anhält, wenn HP "nein" ausgibt und das nicht anhält, wenn HP "ja" ausgibt. K nimmt als Eingabe auch Programme entgegen, die es dann an HP in seinem Innern weitergibt.



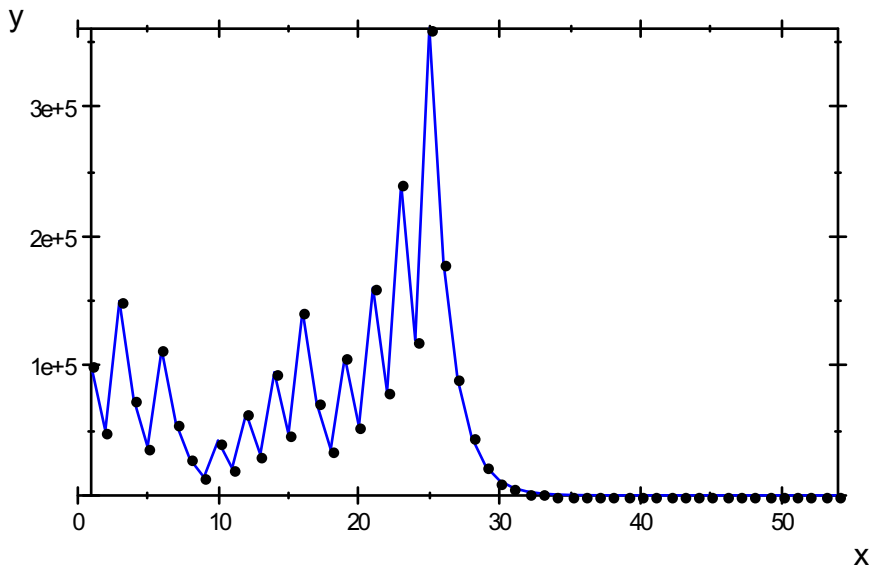
Wenn nun K seinen eigenen Programmcode liest, verarbeitet HP den und antwortet auf eine von zwei Arten:

entweder mit "ja, K hält an" , dann aber hält K nicht an, also Widerspruch erzeugt.
oder mit "nein, K hält nicht an, dann aber hält K an, also auch Widerspruch erzeugt.
Also kann kein Programm HP geben, das das Halteproblem immer löst. q.e.d.

---

## Weitere Beispiele

```
plot(plot::Listplot(f(100002)));
fpr(100002);
```




```
[100002, 50001, 150004, 75002, 37501, 112504, 56252, 28126,
14063, 42190,

   21095, 63286, 31643, 94930, 47465, 142396, 71198, 35599,
106798, 53399,

   160198, 80099, 240298, 120149, 360448, 180224, 90112,
45056, 22528, 11264,

   5632, 2816, 1408, 704, 352, 176, 88, 44, 22, 11, 34, 17,
52, 26, 13, 40, 20,

   10, 5, 16, 8, 4, 2, 1], 54
```