

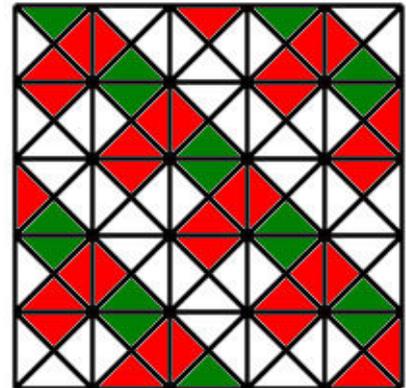
# Domino-Probleme (tiling problems)

## 1. Kachelwand

Gegeben ist eine Menge  $T$  von Fliesentypen:  
 Frage: Kann jede  $n \times m$  – Wand ohne zu drehen mit diesen Fliesen nach Dominoregeln gekachelt werden?

Antwort: ja, denn das Muster rechts lässt sich nach allen Seiten beliebig fortsetzen.

$$T_1 = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{red-green} & \text{white-red} & \text{white-green} \\ \hline \end{array} \right\}$$

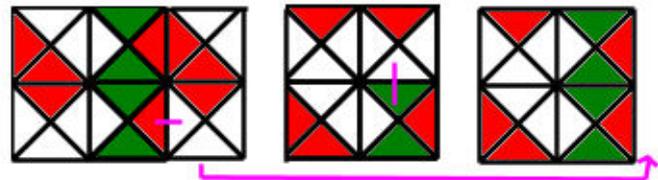


Frage: Kann die obige Frage von einem Programm für jede Fliesenmenge und jede Wandgröße bewiesen werden?

Antwort: Nein, das Domino-Kachelwandproblem ist **unentscheidbar**. (Beweis: Berger 1966, Wang 1981)

Mit dem Austausch von nur zwei Farbflächen entsteht eine Menge  $T$ , mit der sich keine größere Wand kacheln lässt:  
 Mit systematischem Probieren sieht man, dass es nicht geht.

$$T_2 = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{red-white} & \text{white-red} & \text{white-green} \\ \hline \end{array} \right\}$$



Übrigens gibt es bei den Dominoproblemen stets genügend Kacheln jeder Sorte.

Nochmal deutlich:

Es kann keinen Algorithmus geben, der das löst, der also bei Eingabe der endlichen Typenmenge  $T$  eine der folgenden Aussagen erzeugt:

ja, jede  $n \times m$ -Wand ist kachelbar oder  
 nein, es gibt Wände, die nicht kachelbar sind,  
 und der nach dieser Ausgabe anhält.

**Daher heißt das Domino-Kachelwandproblem unentscheidbar.**

Das Domino-Wand-Problem ist unentscheidbar

falsches Argument

"das ist ja klar, wir sollen ein endlicher Algorithmus unendlich große Wände prüfen"

2.

Das Domino-Schlange-Problem ist entscheidbar (in der unendl. Ebene)

Frage: Trü eine endl. Menge von Steintypen  
Die Steine selbst seien quadratisch,  
S, Z seien zwei Punkte der Ebene

(parallele Koordinaten)

Kann Z von S aus durch eine  
Domino-Schlange erreicht werden?

Diese Frage  
kann ein Algo-  
rithmus  
beantworten.

aha hier sind ja auch  
"unendlich" viele Pläne und  
Schlangen zu prüfen.  
dennoch ist das Problem  
entscheidbar.

Verbleibung: Das Domino-Schlange-Problem  
wird entscheidbar, wenn man  
einen einzigsten Punkt aus der Ebene heraus nimmt

Das alles ist bewiesen