Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 2. Mai 2004

Abbrechende Dezimaldarstellung:

Die Dezimaldarstellung bricht genau dann ab, wenn man den Bruch so erweitern kann, dass der Nenner eine Potenz von Zehn wird.
Die Dezimaldarstellung bricht genau dann ab, wenn n ausschließlich die Primfaktoren 2 und 5 enthält.

Beweis: "$\Leftarrow$" $n = 2^r 5^s$ mit $r, s \in \mathbb{N}_0$.

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2^r 5^s} \frac{2^{m-r} 5^{m-s}}{2^{m-r} 5^{m-s}} = \frac{2^{m-r} 5^{m-s}}{2^m 5^m} = \frac{2^{m-r} 5^{m-s}}{10^m} \text{ mit } m := \max(r,s)$$

$$\frac{1}{250} = \frac{1}{2 \cdot 5^3} = \frac{1}{2^1 5^3} \frac{2^2}{2^2} = \frac{2^2}{2^3 5^3} = \frac{4}{10^3} = 0{,}004 \text{ im Beispiel}$$

"$\Rightarrow$" $z = 0{,}a_1 a_2 \ldots\ldots a_r$ mit Ziffern a_i also $\frac{a_1 a_2 \ldots\ldots a_r}{10^r} = \frac{a_1 a_2 \ldots\ldots a_r}{2^r 5^r}$

$$\text{im Beispiel } z = 0{,}0248 = \frac{248}{10000} = \frac{8 \cdot 31}{2^4 5^4} = \frac{31}{2 \cdot 5^4}$$

Periodische Dezimaldarstellung

Die Dezimaldarstellung wird genau dann periodisch, wenn n irgendeinen anderen Primfaktor als 2 oder 5 enthält. Die Periodenlänge ist maximal n-1.
Beweis: Beim schriftlichen Teilen 1:n nach der Methode von Klasse 6 merkt man, dass es nur n-1 verschiedene Reste geben kann. Darum kommt -in der Phase , in der man nur noch Nullen herunterholt- nach spätestens n-1 Schritten ein voriger Rest nochmal.

n enthalte nun keine 2 und keine 5 mehr, also $ggT(10, n) = 1$

Dann ist die Periodenlänge **ein Teiler von** $\varphi(n) = \text{Euler}(n) =$ Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen= $\left|\mathbb{Z}_n^*(n)\right|$ Beispiel $\frac{1}{37} = 0{,}\overline{027}$ und $p = 3 \mid 36 = 37 - 1$

Beweis: *(Lesen Sie erst die Rückverwandlung von periodischen Dezimalzahlzahlen in Brüche!)*

Betrachte $\frac{1}{n} = 0{,}\overline{b_1 b_2 \ldots b_p} = \frac{b_1 b_2 \ldots b_p}{99\ldots\ldots 9} = \frac{b_1 b_2 \ldots b_p}{10^p - 1} \Leftrightarrow 10^p - 1 = b_1 b_2 \ldots b_p \bullet n \underset{n}{\equiv} 0$

Also $10^p \underset{n}{\equiv} 1$,d.h. Periodenlänge p ist die Ordnung von 10 in der Gruppe $\mathbb{Z}_n^*(n)$. Da die Elementordnung die Gruppenordnung teilt, ist die Behauptung für sofort-periodische Dezimalzahlen bewiesen. *Und wenn sie noch nicht die Kryptographievorlesung gehört haben oder sonst von Gruppentheorie keine Ahnung haben, dann ziehen nur das Resumee: "Also man kann das zeigen".*
Vorperioden ändern diesen Zusammenhang nicht, denn

$$\frac{1}{n} = 0{,}a_1 a_2 \ldots a_v \overline{b_1 b_2 \ldots b_p} = (a_1 a_2 \ldots a_v + 0{,}\overline{b_1 b_2 \ldots b_p}) \cdot 10^{-v}$$

$$0{,}083333333\ldots = (8 + 0{,}\bar{3}) \cdot 10^{-2} = (8 + \frac{3}{9}) \cdot 10^{-2} = \frac{8 \cdot 9}{900} + \frac{3}{900} = \frac{75}{900} = \frac{1}{12}$$