Mersenne Primzahlen+vollkommene Z.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Jan 2012, www.mathematik-verstehen.de

(%i12) f(x):=2^x-1 /* Mersenne-Zahlen*/;

(%o12) $f(x):=2^{x}-1$

Die Vorgänger von Zweierpotenzen heißen "Mersenne-Zahlen".

Darunter sind einige Primzahlen, sie heißen "Mersenne-Primzahlen"

"Vollkommene Zahlen" sind die, die gleich der Summe ihrer echten Teiler sind

0.1 Die zur Mersenne-Primzahlen gebildeten Dreiescksszahl sind "vollkommene Zahlen". Andere gerade vollkommene Zahlen gibt es nicht. Ungerade vollkommene Zahlen kennt man unter 10^500 nicht.

Info: Wikipedia: vollkommene Zahlen Mersenne Primzahlen

(%i57) v(x):=2^(x-1)*(2^x-1) /*Dreieckszahlen aus Mersenne-Zahlen*/;

(%o57) $v(x):=2^{x-1}\left(2^{x}-1\right)$

Vollkommen sind diese also nur, wenn die darüber stehende Mersenne-Zahl eine Primzahl ist.

Im Folgenden stehen übereinander:
Primzahl, Mersenne-Zahl,
Kleiner Fermat für diese: Primzahlkandidat falls 1,
Faktorisierung der Mersenne-Zahl, falls zerlegt: keine Mersenne-Primzahl
Kandidat für Vollkommene Zahl: ja falls f(p) Mersenne-Primzahl.

(%i58) p:2;f(p); power_mod(2,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);

(%o58) 2
(%o59) 3
(%o60) 1
(%o61) 3
(%o62) 6

(%i79) p:3;f(p); power_mod(2,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);

(%o79) 3
(%o80) 7
(%o81) 1
(%o82) 7
(%o83) 28

```
(%i84) p:5;f(p); power_mod(3,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);
(%o84) 5
(%o85) 31
(%o86) 1
(%o87) 31
(%o88) 496
```

```
(%i94) p:7;f(p); power_mod(3,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);
(%o94) 7
(%o95) 127
(%o96) 1
(%o97) 127
(%o98) 8128
```

```
(%i99) p:11;f(p); power_mod(3,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);
(%o99) 11
(%o100) 2047
(%o101) 1013
(%o102) 23 89
(%o103) 2096128
```

```
(%i104) p:13;f(p); power_mod(3,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);
(%o104) 13
(%o105) 8191
(%o106) 1
(%o107) 8191
(%o108) 33550336
```

```
--> p:17;f(p); mod(2^(2^p),p);factor(f(p));v(p);
(%o33) 17
(%o34) 131071
(%o35) 1
(%o36) 131071
(%o37) 8589869056
```

```
--> p:19;f(p); mod(2^(2^p),p);factor(f(p));
(%o38) 19
(%o39) 524287
(%o40) 4
(%o41) 524287
```

```
(%i109) p:23;f(p); power_mod(3,f(p)-1,f(p));factor(f(p));
(%o109) 23
(%o110) 8388607
(%o111) 5884965
(%o112) 47 178481
```

```
(%i113) p:29;f(p); power_mod(3,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);
(%o113) 29
(%o114) 536870911
(%o115) 65165529
(%o116) 233 1103 2089
(%o117) 144115187807420416

(%i118) p:31;f(p); power_mod(3,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);
(%o118) 31
(%o119) 2147483647
(%o120) 1
(%o121) 2147483647
(%o122) 2305843008139952128

(%i123) p:37;f(p); power_mod(3,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);
(%o123) 37
(%o124) 137438953471
(%o125) 103888408793
(%o126) 223 616318177
(%o127) 9444732965670570950656

(%i128) p:61;f(p); power_mod(3,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);
(%o128) 61
(%o129) 2305843009213693951
(%o130) 1
(%o131) 2305843009213693951
(%o132) 2658455991569831744654692615953842176

(%i133) p:67;f(p); power_mod(3,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);
(%o133) 67
(%o134) 147573952589676412927
(%o135) 95591506202441271281
(%o136) 193707721 761838257287
(%o137) 10889035741470030830754200461521744560128

(%i138) p:87;f(p); power_mod(3,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);
(%o138) 87
(%o139) 154742504910672534362390527
(%o140) 145359760490897399382427710
(%o141) 7 233 1103 2089 4177 9857737155463
(%o142) 11972621413014756705924586072240538041685132210864128

(%i143) p:89;f(p); power_mod(3,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);
(%o143) 89
(%o144) 618970019642690137449562111
(%o145) 1
(%o146) 618970019642690137449562111
(%o147) 191561942608236107294793378084303638130997321548169216
```

```
(%i148) p:101;f(p); power_mod(3,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);
(%o148) 101
(%o149) 2535301200456458802993406410751
(%o150) 488575109646220806737050079l2
(%o151) 7432339208719 341117531003194129
(%o152) 3213876088517980551083924184681057554444177758164088967397376
```

```
(%i153) p:107;f(p); power_mod(3,f(p)-1,f(p));factor(f(p));v(p);
(%o153) 107
(%o154) 162259276829213363391578010288127
(%o155) 1
(%o156) 162259276829213363391578010288127
(%o157) 13164036458569648337239753460458722910223472318386943117783728128
```

es folgen 127, 521,607,1279,2203.... als weitere Mersenne Primzahlen

Die folgende Zahl hat man bis 1932 für eine Merenne-Primzahl gehalten.

```
(%i160) f(257);
(%o160)
231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915168015826259279871
```

```
(%i167) p:257;power_mod(2,f(p)-1,f(p));power_mod(3,f(p)-1,f(p));
(%o167) 257
(%o168) 1
(%o169)
196794375505491229799009947282418342699685882944577157308481034524954229107763
```

Aber der kleine Fermat mit Basis 3 hätte es ans Licht gebracht.

```
--> /* factor(mp257) */;
Incorrect syntax: Premature termination of input at ;.
/*Spacefactor(mp257)Space*/;
         ^
```

Suche nach 5 Minuten abgebrochen

0.2 Kleiner Satz von Fermat p prim folgt mod(a^(p-1),p)=1

```
(%i177) mod(2^12,13); p:11;f(p);power_mod(2,f(p)-1,f(p));power_mod(3,f(p)-1,f(p));
(%o177) 1
(%o178) 11
(%o179) 2047
(%o180) 1
(%o181) 1013
```

Bein Kleinen Fermat ist man gut beraten, beim Ergebnis 1 auch andere Basen auszuprobieren.