Summenformel, Beweis mit vollständiger Induktion

Behauptung: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ Ha06

Die Summe der 3. Potenzen ist das Quadrat einer passenden Dreieckszahl, anschaulicher Beweis für den Unterricht steht unten.

Beweis mit vollst. Ind.

Verankerung: $n=1$ Rechte Seite $\frac{1}{4}\cdot 1^2(1+1)^2 = \frac{1}{4}\cdot 2^2 = 1 = 1^3$ linke S.

zum Verstehen: $n=2$ $\frac{1}{4}\cdot 2^2(2+1)^2 = \frac{4}{4}\cdot 9 = 9 = 1+8 = 1^3+2^3 =$ linke S.

IA $1+2^3+\dots n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

Ziel $1+2^3+\dots+(n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$

$n \rightsquigarrow n+1$ linke Seite $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \underbrace{1+\dots+n^3}+(n+1)^3$

$$\overset{IA}{=} \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + (n+1)^3$$

$$= \left(\frac{1}{4} n^2 + (n+1)\right)(n+1)^2$$

G-F

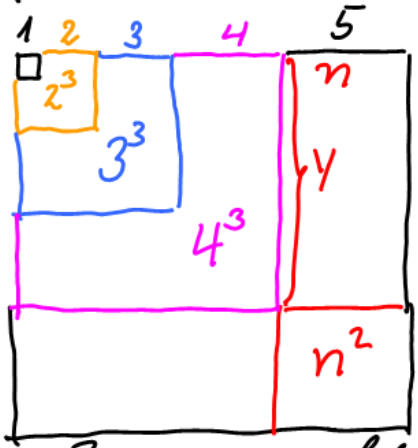
$$= \frac{1}{4}\left(n^2+4(n+1)\right)(n+1)^2 = \frac{1}{4}(n^2+4n+4)(n+1)^2$$

$$= \frac{1}{4}(n+2)^2(n+1)^2 \quad \text{q.e.d.}$$

dies ist das Ziel gewesen.

Gauß $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$

Anschaulicher Beweis:



Konstruktion: Stets ein Kästchen mehr und daraus ein Qudrat zeichnen. Die Quadratkanten sind also die Gaußzahlen (= Dreiecks z.)

$y = \frac{1}{2}(n-1)\cdot n$ Beim Schritt n kommt also ein ⅃ dazu mit

$2ny + n^2 = 2n\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + n^2 = n^2(n-1+1) = n^3$

Zusammen folgt: $1+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left(\frac{1}{2} n(n+1)\right)^2 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ qed.

Betrachtung: für den Unterricht ist der untere Beweis besser. Es reicht aber nicht, nur zu beobachten, dass ⅃ n^3 Kästchen haben. (für einen Beweis)