Polynome 4.Grades vollständig

Prof. Dr. Dörte Haftendorn MuPAD 4 April 07 http://haftendorn.uni-lueneburg.de

###

Die Ableitungen der Polynome 4. Grades sind Polynome vom Grad 2.
Damit kommen i.w. nur die folgenden drei Typen infrage.
Die an der x-Achse gespiegelten Versionen werden nicht gesondert betrachtet.

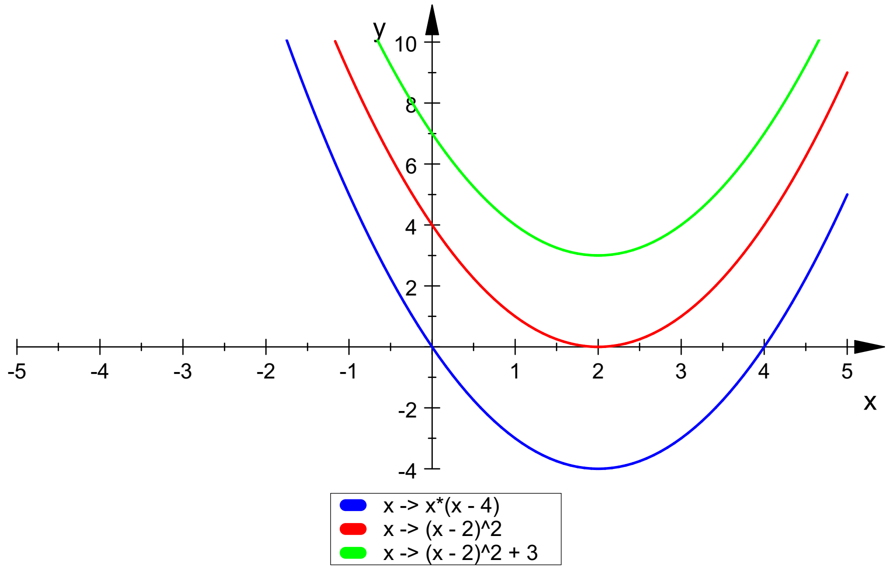
```
fff1:=x->x*(x-4);  fff2:=x->(x-2)^2; fff3:=x->(x-2)^2+3;
```

$$x \to x \cdot (x-4)$$

$$x \to (x-2)^2$$

$$x \to (x-2)^2 + 3$$

```
plotfunc2d(fff1,fff2,fff3,ViewingBoxYRange=-4..10)
```



Typ 1:   f'' hat zwei Nullstellen

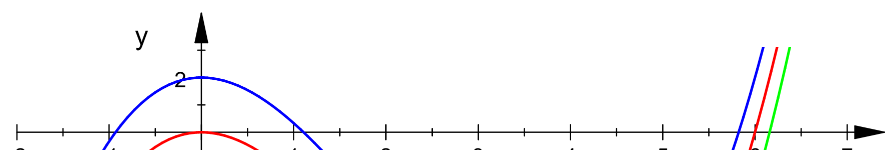
Durch Integration ergibt sich eine Stammfunktion, die drei typische Lagen haben kann.

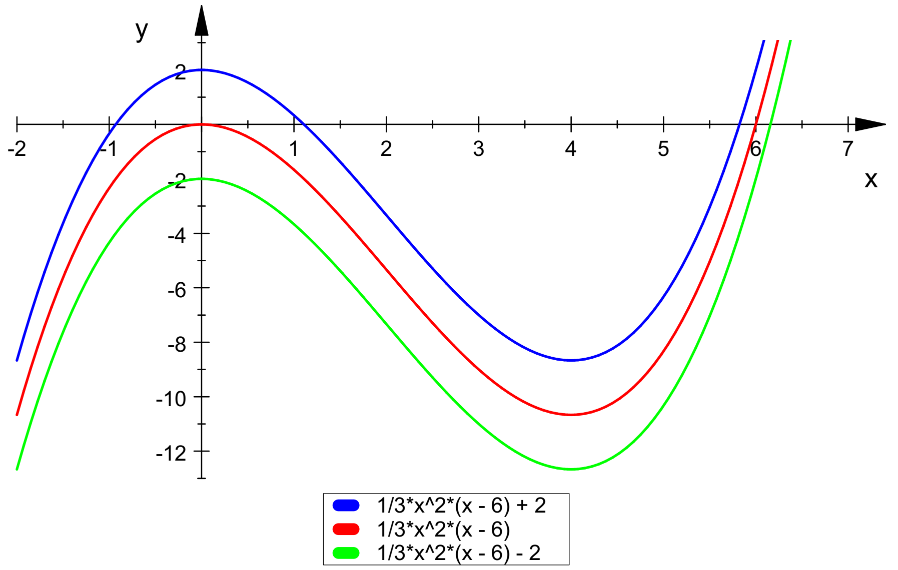
```
ff11:=x-->int(fff1(x), x): ff11(x);
ff10:=x-->ff11(x)+2;
ff12:=x-->ff11(x)-2;
plotfunc2d(ff10(x),ff11(x),ff12
(x),x=-2..7,ViewingBoxYRange=-13..3)
```

$$\frac{x^2 \cdot (x-6)}{3}$$

$$x \to \frac{x^2 \cdot (x-6)}{3} + 2$$

$$x \to \frac{x^2 \cdot (x-6)}{3} - 2$$





Typ 2: f '' hat eine doppelte Nullstelle

Durch Integration ergibt sich eine Stammfunktion, die zwei typische Lagen haben kann.

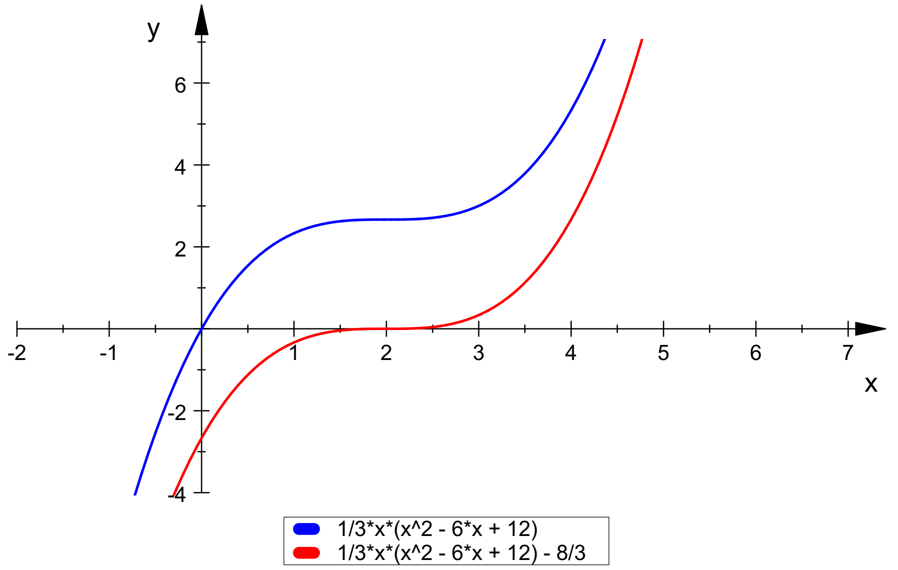
```
ff21:=x-->int(fff2(x), x): ff21(x);
ff21(2)
```

$$\frac{x \cdot \left(x^2 - x \cdot 6 + 12\right)}{3}$$

$$\frac{8}{3}$$

```
ff22:=x-->ff21(x)-8/3;
plotfunc2d(ff21(x),ff22
(x),x=-2..7,ViewingBoxYRange=-4..7)
```

$$x \to \frac{x \cdot \left(x^2 - x \cdot 6 + 12\right)}{3} - \frac{8}{3}$$



Typ 3: f '' hat keine Nullstelle

Durch Integration ergibt sich eine Stammfunktion, die zwei typische Lagen haben kann.

Durch Integration ergibt sich eine Stammfunktion, die zwei typische Lagen haben kann.

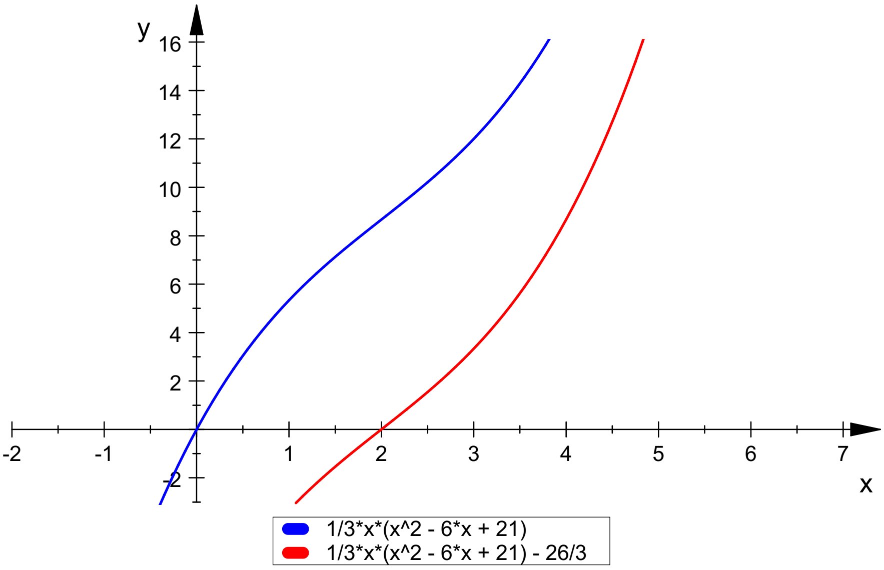
```
ff31:=x-->int(fff3(x), x): ff31(x);
ff31(2)
```

$$\frac{x \cdot (x^2 - x \cdot 6 + 21)}{3}$$

$$\frac{26}{3}$$

```
ff32:=x-->ff31(x)-26/3;
plotfunc2d(ff31(x),ff32
(x),x=-2..7,ViewingBoxYRange=-3..16)
```

$$x \to \frac{x \cdot (x^2 - x \cdot 6 + 21)}{3} - \frac{26}{3}$$



Im Folgenden werden die zugehörigen Formtypen für f,
das Polynom 4. Grades ermittelt und weiter unten gezeichnet.

Typ 1: f hat zwei Wendepunkte

```
f10:=x-->int(ff10(x), x);
//plotfunc2d(f10,x=-2..9,ViewingBoxYRange=-25..8)
```

$$x \to \frac{x \cdot (x^3 - x^2 \cdot 8 + 24)}{12}$$

```
f11:=x-->int(ff11(x), x);
//plotfunc2d(f11,x=-2..9,ViewingBoxYRange=-40..10)
```

$$x \to \frac{x^3 \cdot (x - 8)}{12}$$


```
f12:=x-->int(ff12(x), x);
//plotfunc2d(0.5*f12,x=-2..9,ViewingBoxYRange=-25..8)
```

$$x \to -\frac{x \cdot (-x^3 + 8 \cdot x^2 + 24)}{12}$$

$$x \rightarrow -\frac{x \cdot \left(-x^3 + 8 \cdot x^2 + 24\right)}{12}$$

Typ 2: f hat eine "starke Plattstelle"

```
f21:=x-->int(ff21(x), x);
//plotfunc2d(f21,x=-2..7,ViewingBoxYRange=-2..12)
```

$$x \rightarrow \frac{x^2 \cdot \left(x^2 - x \cdot 8 + 24\right)}{12}$$

```
f22:=x-->int(ff22(x), x);
//plotfunc2d(f22,x=-2..7,ViewingBoxYRange=-2..12)
```

$$x \rightarrow \frac{x \cdot (x - 4) \cdot \left(x^2 - x \cdot 4 + 8\right)}{12}$$

Typ 3: f hat eine "schwache Plattstelle", "Beulenstelle"

```
f31:=x-->int(ff31(x), x);
//plotfunc2d(0.3*f31,x=-2..6,ViewingBoxYRange=-8..12)
```

$$x \rightarrow \frac{x^2 \cdot \left(x^2 - x \cdot 8 + 42\right)}{12}$$

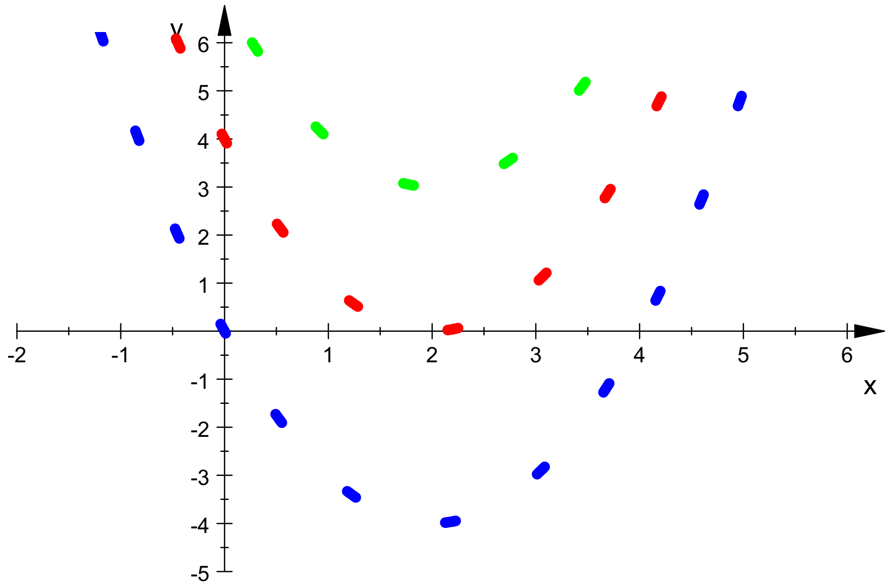
```
f32:=x-->int(ff32(x), x);
//plotfunc2d(0.3*f32,x=-2..6,ViewingBoxYRange=-8..12)
```

$$x \rightarrow \frac{x \cdot (x - 4) \cdot \left(x^2 - x \cdot 4 + 26\right)}{12}$$

Zeichnungen für alle vorkommenden Typen von Polynomen 4. Grades.

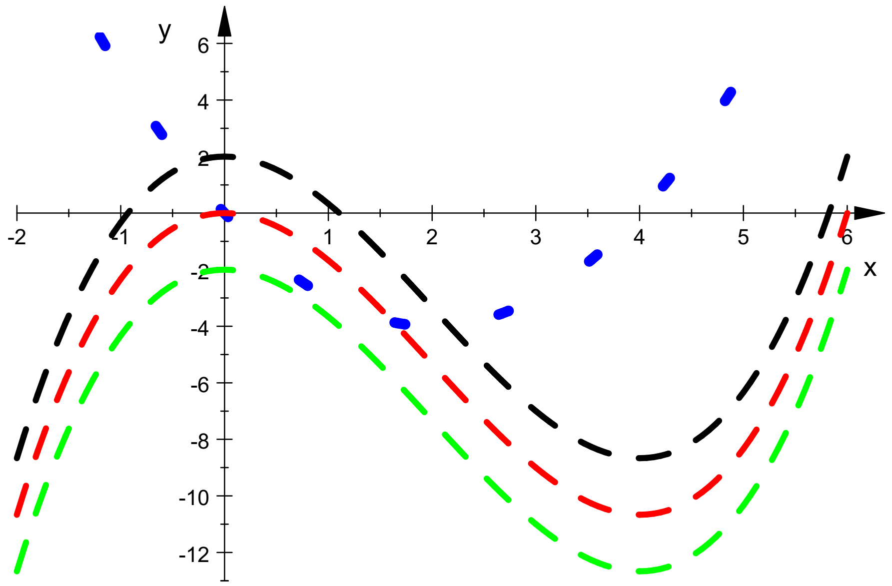
2. Ableitung ist gepunktet, 1. Ableitung ist gestrichelt, f selbst ist durchgezogen.

```
fff1p:=plot::Function2d(fff1(x),x=-2..6,ViewingBoxYRange=-5..2,
              LineColor=[0,0,1], LineStyle=Dotted, LineWidth=1.4):
fff2p:=plot::Function2d(fff2(x),x=-2..6,ViewingBoxYRange=-5..2,
              LineColor=[1,0,0], LineStyle=Dotted, LineWidth=1.4):
fff3p:=plot::Function2d(fff3(x),x=-2..6,ViewingBoxYRange=-5..6,
              LineColor=[0,1,0], LineStyle=Dotted, LineWidth=1.4):
plot(fff1p,fff2p,fff3p)
```

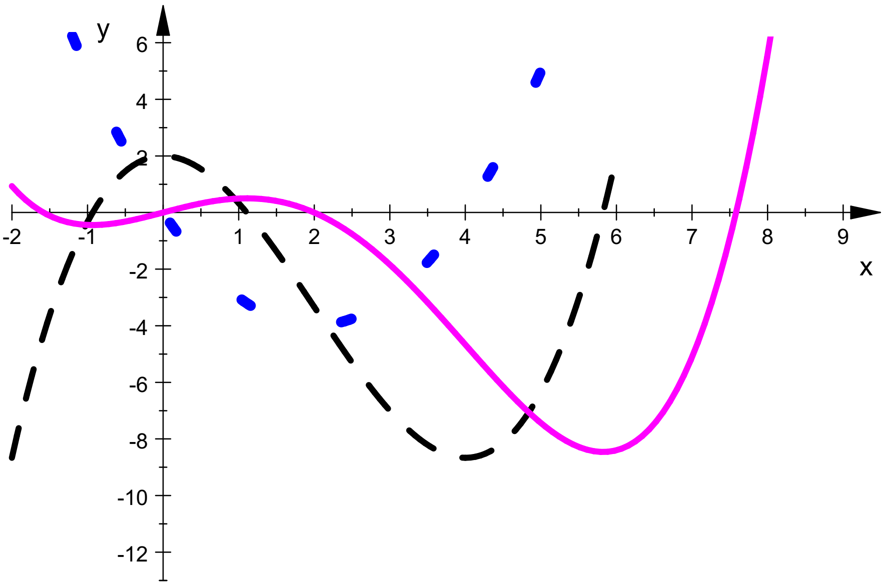
Typ 1: f " hat zwei Nullstellen, f hat zwei Wendepunkte

```
ff10p:=plot::Function2d(ff10(x),x=-2..6,ViewingBoxYRange=-8..6,
              LineColor=[0,0,0], LineStyle=Dashed, LineWidth=0.8):
ff11p:=plot::Function2d(ff11(x),x=-2..6,ViewingBoxYRange=-11..2,
              LineColor=[1,0,0], LineStyle=Dashed, LineWidth=0.8):
ff12p:=plot::Function2d(ff12(x),x=-2..6,ViewingBoxYRange=-13..2,
              LineColor=[0,1,0], LineStyle=Dashed, LineWidth=0.8):
 plot(fff1p,ff10p,ff11p,ff12p)
```



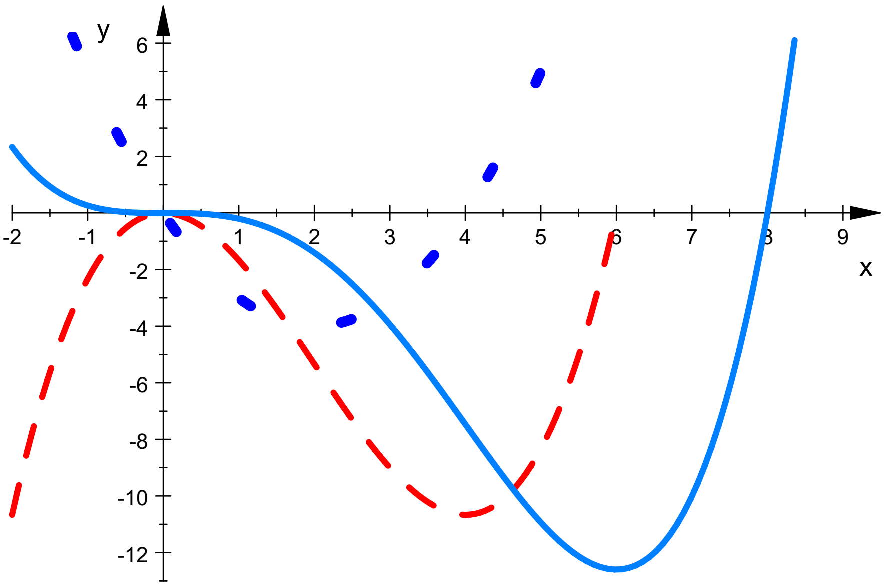
Typ 10 f hat drei Extremstellen, f' drei einfache Nullstellen

```
f10p:=plot::Function2d(0.35*f10(x),x=-2..9,ViewingBoxYRange=-13..6,
               LineColor=[1,0,1],  LineWidth=0.8):
 plot(fff1p,ff10p,f10p)
```

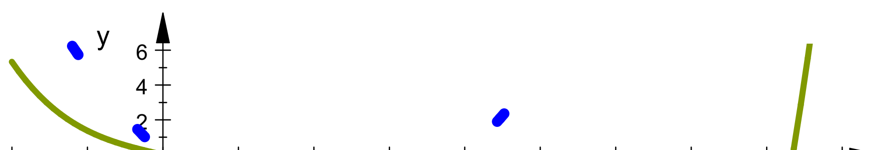
Typ 11 f hat eine Sattelstelle und eine Extremstelle
f' eine doppelte und eine einfach Nullstelle

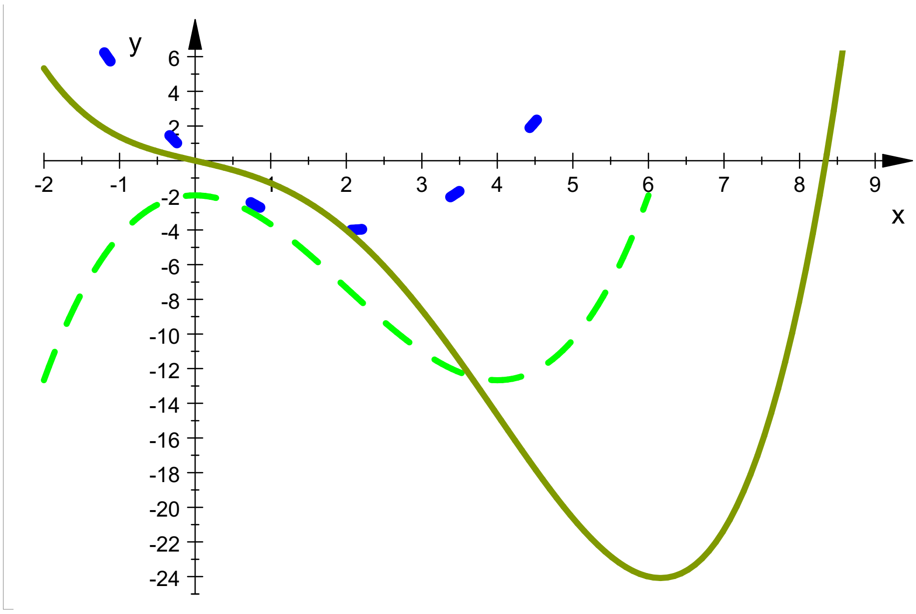
```
f11p:=plot::Function2d(0.35*f11(x),x=-2..9,ViewingBoxYRange=-13..6,
              LineColor=[0,0.5,1],  LineWidth=0.8):
 plot(fff1p,ff11p,f11p)
```



Typ 12 f hat einen schrägen Sattel und ein Extremum.
f ' genau eine einfache Nullstelle

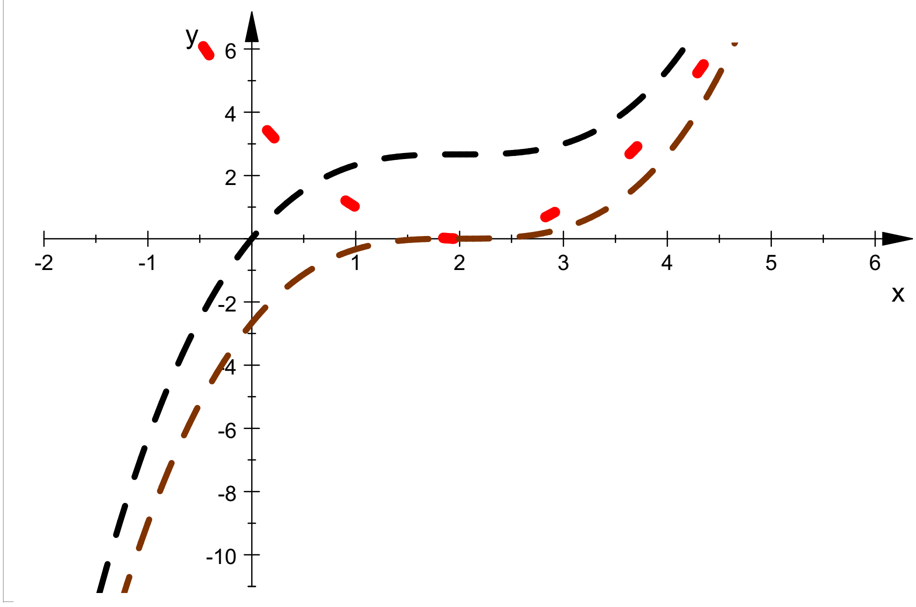
```
f12p:=plot::Function2d(0.5*f12(x),x=-2..9,ViewingBoxYRange=-25..6,
             LineColor=[0.5,0.6,0],  LineWidth=0.8):
 plot(fff1p,ff12p,f12p)
```



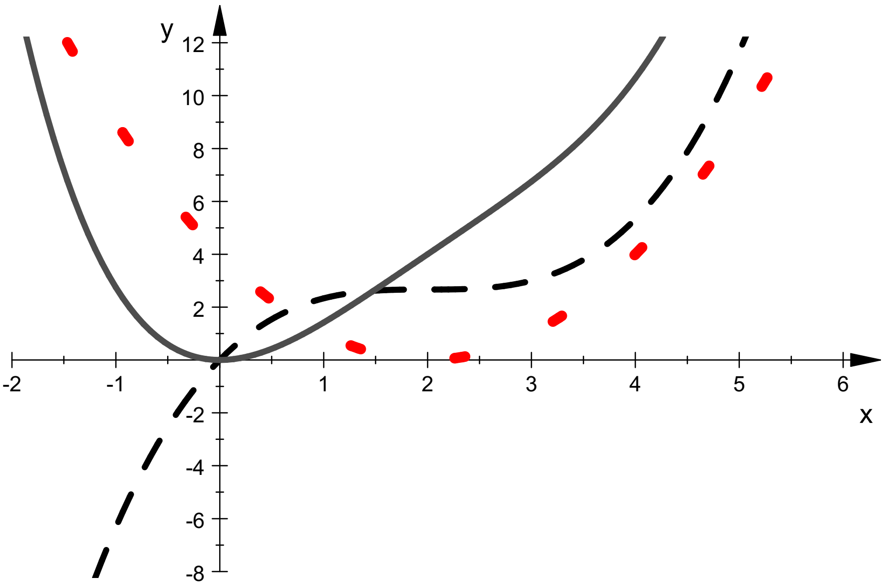
Typ 2 f '' hat eine doppelte Nullstelle, f ' hat einen Sattel,
f hat keinen Wendepunkt

```
ff21p:=plot::Function2d(ff21(x),x=-2..6,ViewingBoxYRange=-8..6,
              LineColor=[0,0,0], LineStyle=Dashed, LineWidth=0.8):
ff22p:=plot::Function2d(ff22(x),x=-2..6,ViewingBoxYRange=-11..2,
              LineColor=[0.5,0.2,0], LineStyle=Dashed, LineWidth=0.8):
 plot(fff2p,ff21p,ff22p)
```



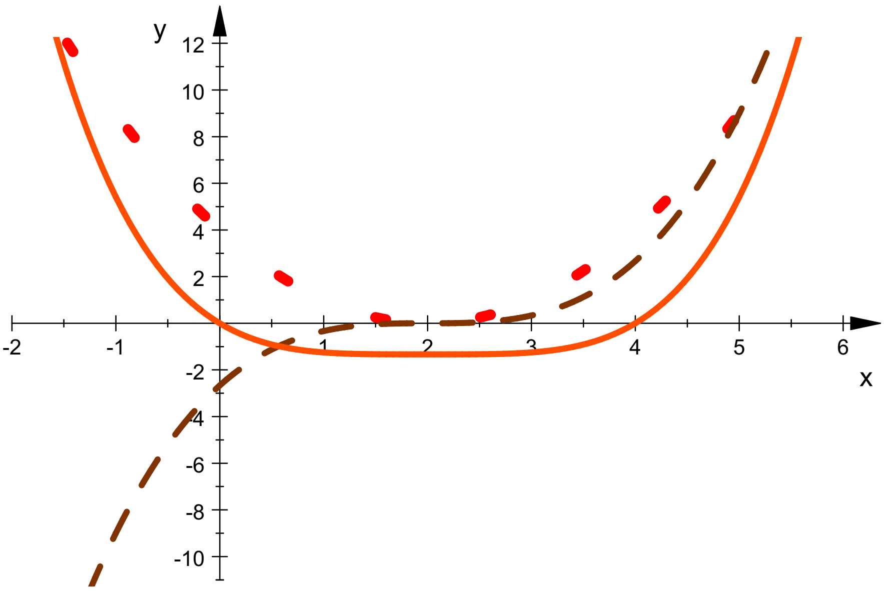
Typ 21 f hat eine starke Plattstelle und eine Extremstelle
f ' einen Sattel und eine einfache Nullstelle

```
f21p:=plot::Function2d(f21(x),x=-2..6,ViewingBoxYRange=-2..12,
              LineColor=[0.3,0.3,0.3],  LineWidth=0.8):
 plot(fff2p,ff21p,f21p)
```

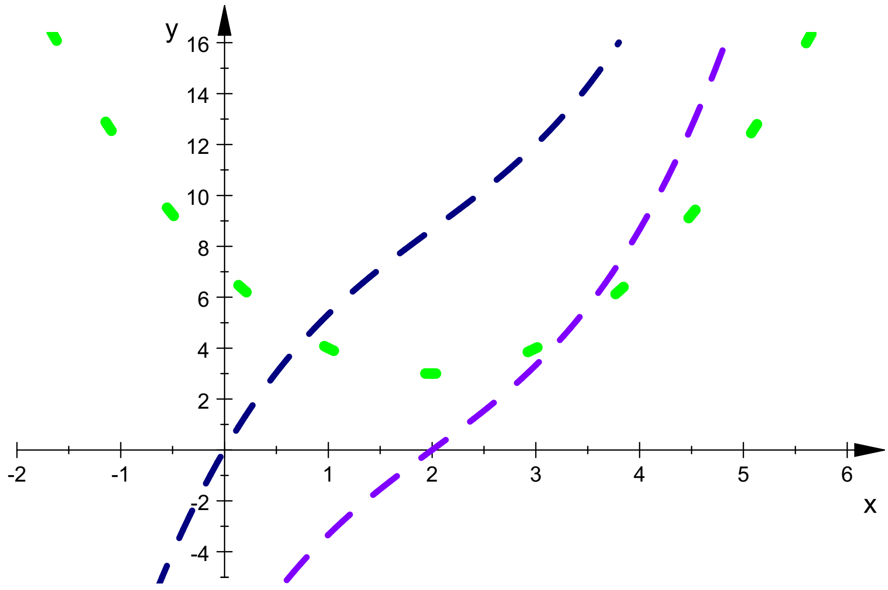
Typ 22 f hat breites Extremum.
f ' eine dreifache Nullstelle

```
f22p:=plot::Function2d(f22(x),x=-2..6,ViewingBoxYRange=-2..12,
              LineColor=[1,0.3,0],  LineWidth=0.8):
 plot(fff2p,ff22p,f22p)
```



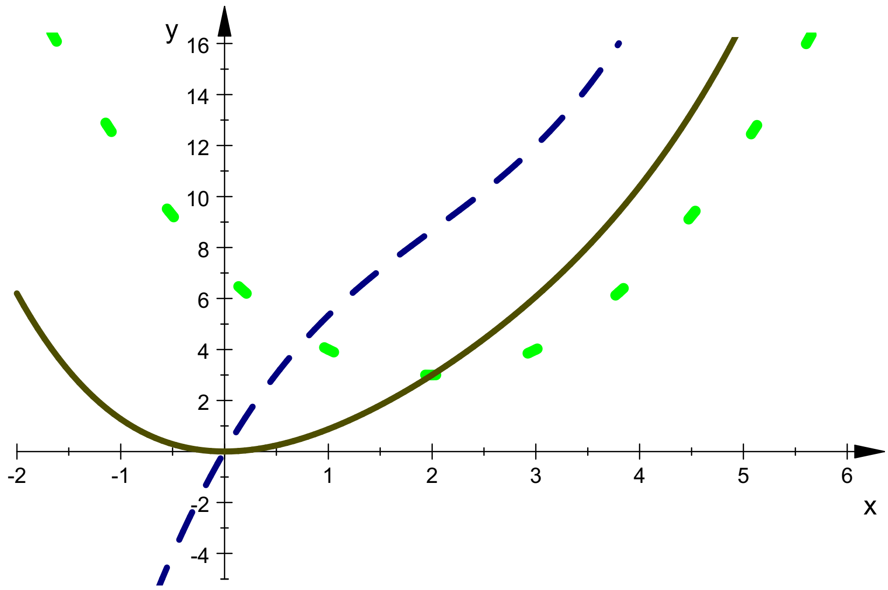
Typ 3 f '' hat keine Nullstelle, f ' hat einen schrägen Sattel und eine
einfache Nullstelle,   f hat ein einfaches Extremum

```
ff31p:=plot::Function2d(ff31(x),x=-2..6,ViewingBoxYRange=-2..16,
              LineColor=[0,0,0.5], LineStyle=Dashed, LineWidth=0.8):
ff32p:=plot::Function2d(ff32(x),x=-2..6,ViewingBoxYRange=-2..16,
              LineColor=[0.5,0,1], LineStyle=Dashed, LineWidth=0.8):
 plot(fff3p,ff31p,ff32p)
```

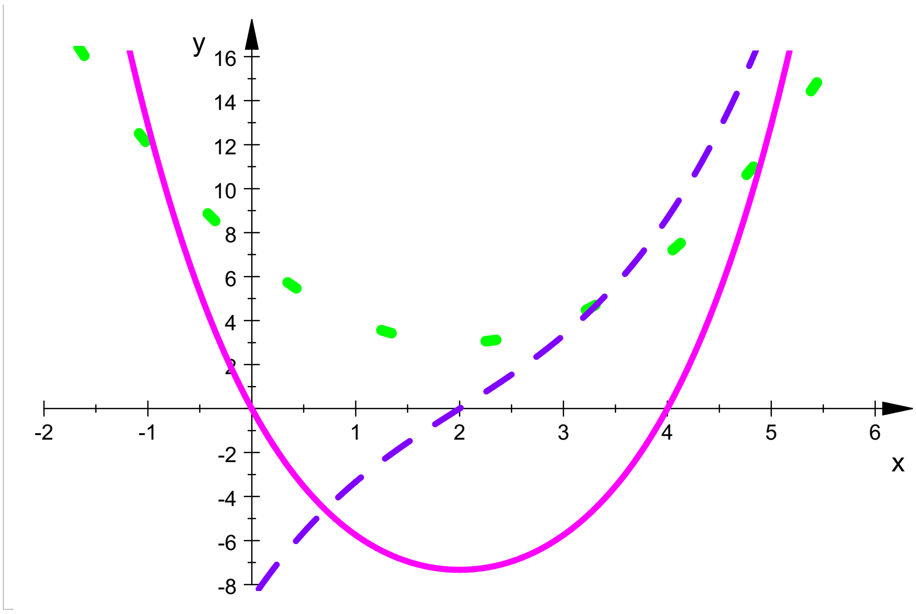
Typ 31:   f hat eine einfaches Extremum und eine "Beule"

```
f31p:=plot::Function2d(0.3*f31
(x),x=-2..6,ViewingBoxYRange=-2..12,
                LineColor=[0.3,0.3,0],  LineWidth=0.8):
 plot(fff3p,ff31p,f31p)
```



Typ 32:   f hat eine einfaches Extremum das zugleich eine "Beule" ist.

```
f32p:=plot::Function2d(f32(x),x=-2..6,ViewingBoxYRange=-8..12,
                 LineColor=[1,0,1],  LineWidth=0.8):
 plot(fff3p,ff32p,f32p)
```

Berechnungen

```
[fff1(x),fff2(x),fff3(x)]
```

$$\left[x \cdot (x-4),\ (x-2)^2,\ (x-2)^2+3\right]$$

```
[ff10(x),ff11(x),ff12(x)]
```

$$\left[\frac{x^2 \cdot (x-6)}{3}+2,\ \frac{x^2 \cdot (x-6)}{3},\ \frac{x^2 \cdot (x-6)}{3}-2\right]$$

```
[ff21(x),ff22(x)];[ff31(x),ff32(x)]
```

$$\left[\frac{x \cdot \left(x^2-x \cdot 6+12\right)}{3},\ \frac{x \cdot \left(x^2-x \cdot 6+12\right)}{3}-\frac{8}{3}\right]$$

$$\left[\frac{x \cdot \left(x^2-x \cdot 6+21\right)}{3},\ \frac{x \cdot \left(x^2-x \cdot 6+21\right)}{3}-\frac{26}{3}\right]$$

```
[f10(x),f11(x),f12(x)]
```

$$\left[\frac{x \cdot \left(x^3-x^2 \cdot 8+24\right)}{12},\ \frac{x^3 \cdot (x-8)}{12},\ -\frac{x \cdot \left(-x^3+8 \cdot x^2+24\right)}{12}\right]$$

```
[f21(x),f22(x),expand(f22(x))];[f31(x),f32(x),expand(f32
(x))]
```

$$\left[\frac{x^2 \cdot \left(x^2-x \cdot 8+24\right)}{12},\ \frac{x \cdot (x-4) \cdot \left(x^2-x \cdot 4+8\right)}{12},\ \frac{x^4}{12}-\frac{x^3 \cdot 2}{3}+2 \cdot x^2-\frac{x \cdot 8}{3}\right]$$

$$\left[\frac{x^2 \cdot \left(x^2-x \cdot 8+42\right)}{12},\ \frac{x \cdot (x-4) \cdot \left(x^2-x \cdot 4+26\right)}{12},\ \frac{x^4}{12}-\frac{x^3 \cdot 2}{3}+\frac{7 \cdot x^2}{2}-\frac{x \cdot 26}{3}\right]$$

Einzelne Werte aus der händischen Rechung:

Typ 1 hat zwei Wendepunkte. und zwar an den Stellen 0 und 4.
Die Ordinaten sind: (Im Bild z.T. gestaucht)

```
f10(4),f11(4),f12(4)
```

```
f10(4),f11(4),f12(4)
```

$$-\frac{40}{3}, -\frac{64}{3}, -\frac{88}{3}$$

Typ 2 hat keine Wendepunkte, aber eine starke Plattstelle bei x=2.
Die Ordinaten sind:

```
f21(2),f22(2)
```

$$4, -\frac{4}{3}$$

Typ 3 hat keine Wendepunkte, aber eine Beule bei x=2.
Die Ordinaten sind: (Im Bild z.T. gestaucht)

```
f31(2),f32(2)
```

$$10, -\frac{22}{3}$$