Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Oktober 02

Horner-Schema

num6hornerschema.pdf

Die Auswertung von Polynomen ist numerisch durchaus heikel.
Wegen der Potenzen und der Differenzbildungen ist numerische Instabilität häufig.
Jedes Polynom

$$p_n(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$$

kann man in der Klammerform schreiben

$$p_n(x)=((((a_n x+a_{n-1})x+a_{n-2})x+a_{n-3})x+\ldots\ldots+a_1)x+a_0$$

Dieser Darstellung entspricht ein Rechenschema, das sich früher von Hand und heute mit TR oder Tabellenkalkulation leicht durchziehen lässt.

	A	B	C	D	E	F
1		a4	a3	a2	a1	a0
2	x	1	-4	-6	4	5
3	-1		-1	5	1	-5
4		1	-5	-1	5	0
5	-1		-1	6	-5	0
6		1	-6	5	0	0
7	1		1	-5	0	0
8		1	-5	0	0	0
9	5		5	0	0	0
10		1	0	0	0	0
11						

Beispiel $p_4(x)=x^4-4x^3-6x^2+4x+5$

In die 1. Zeile schreibt man alle a_i , nicht vorhandene als ***0*** ,
vorn die Einsetzung x_0 .
Senkrecht wird addiert, hier zuerst B4,
das Ergebnis dann mit x_0 multipliziert, ergibt C3, senkrecht addiert ergibt B5 usw.
Als letztes ergibt sich $p(x_0)$. Diese **Berechnung ist numerisch entschieden besser**.
Hier ist p(-1)=0. X=-1 ist also Nullstelle.

In diesem Fall stehen in der Zeile 4 die Koeffizienten von $\dfrac{p_n(x)}{x-x_0}$.

Also braucht man gar nicht zu dividieren, man liest einfach ab:

$$p_4(x)=x^4-4x^3-6x^2+4x+5 \;=\; (x+1)\;(x^3 \;-\; 5x^2-x+5)$$

Da man nun die Nullstellen dieses rechten Faktors sucht, braucht man nur noch auf gleiche Art weiter zu machen. x=-1 ist nochmal Nullstelle, also doppelte Nullstelle.

$$p_4(x) \;=\; (x+1)^2\;(x^2 \;-\; 6x \;+\; 5)$$

Entweder man löst jetzt die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 5=0$ oder macht weiter.

Da als ganzzahlige Lösungen nur die Teiler der absoluten Gliedes in Frage kommen, ist man mit 1 und 5 schnell beim Ziel

$$p_4(x) \;=\; (x+1)^2\;(x-1)\;(x-5)$$

das Polynom ist vollständig zerlegt, wie man es z.B. für die Partialbruchzerlegung braucht.

Klar ein CAS ist auch so programmiert:

```
factor(x^4-4*x^3-6*x^2+4*x+5)
```

$$(x-1)\cdot(x-5)\cdot(x+1)^2$$

Ist x_0 aber nicht genau Nullstelle, so führt man das Hornerschema dennoch mit x_0 weiter. Dann steht nämlich am Ende der Zeile 6 an vorletzter Stelle Platz E6 ***p'(x₀)***. Diesen Wert kann man in der Newtonformel für die numerische Nullstellensuche gebrauchen.