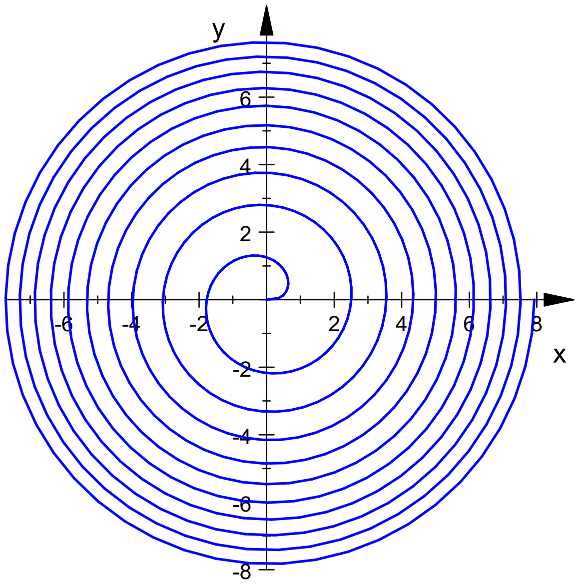
Wurzelspirale

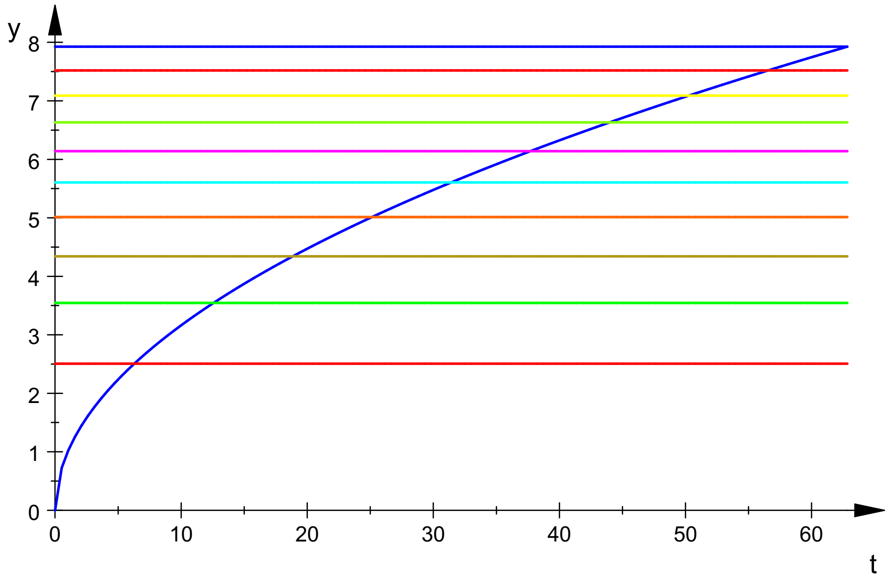
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Juni 09 Update 19.06.09
www.mathematik-verstehen.de http://haftendorn.uni-lueneburg.de
##

```
sp:=plot::Polar([sqrt(t),t],t=0..20*PI,
Mesh=500):plot(sp)
```



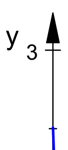
Zugehörige Kartsesische Darstellung

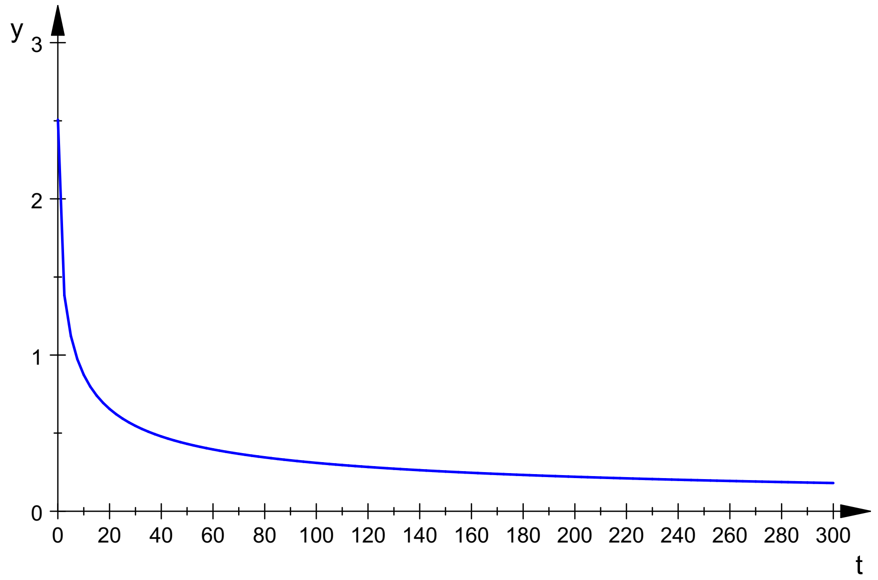
```
plotfunc2d(sqrt(t), sqrt(2*k*PI)$
k=1..10,sqrt(2*9*PI),t=0..20*PI, LegendVisible=FALSE)
```



Hier sieht man, dass sie nach außen zu immer enger wird.
Darstellung der Abstände

```
plotfunc2d(sqrt(t+2*PI)-sqrt(t),t=0..300, Axes=Origin,
ViewingBoxYRange=0..3)
```



Die Breite der Spiralenringe geht gegen Null. Die Breite der gesamten Wurzelspirale ist aber nicht beschränkt.
##################################

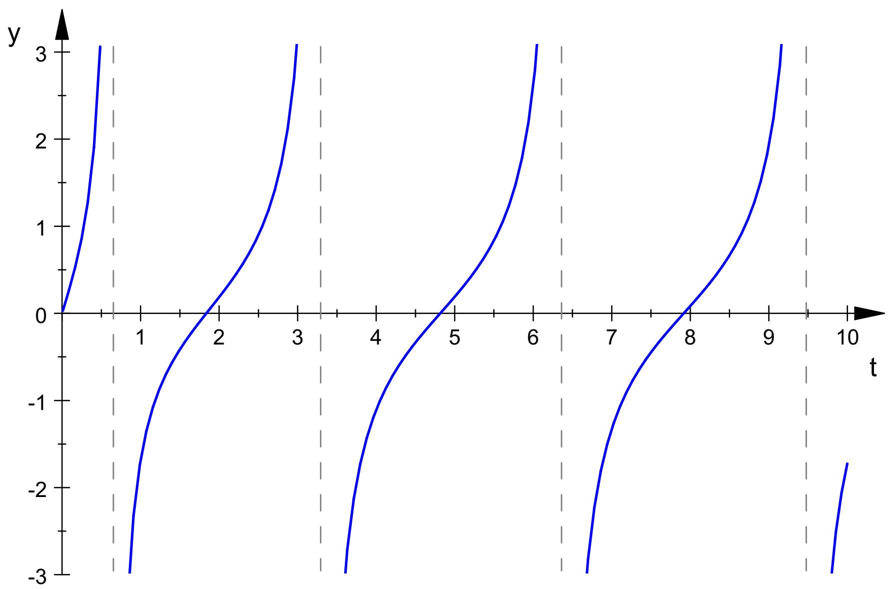
```
r:=t->sqrt(t);
```

$$t \rightarrow \sqrt{t}$$

```
steig:=t->(r'(t)*sin(t)+r(t)*cos(t))/(r'(t)*cos(t)-r(t)*sin(t))
```

$$t \rightarrow \frac{r'(t) \cdot \sin(t) + r(t) \cdot \cos(t)}{r'(t) \cdot \cos(t) - r(t) \cdot \sin(t)}$$

```
plotfunc2d(steig(t),t=0..10)
```



Die einzige Wendestelle ist als Extremstelle gut zu sehen.
Nenner und Zähler extra:

```
denom(steig(t)), numer(steig(t))
```

```
denom(steig(t)), numer(steig(t))
```

$$-2\cdot\sqrt{t}\cdot(\cos(t)-2\cdot t\cdot\sin(t)),\ -2\cdot\sqrt{t}\cdot(\sin(t)+2\cdot t\cdot\cos(t))$$

Polarwinkel, bei denen waagerechte Tangenten vorliegen.

```
numeric::solve(numer(steig(t))=0,t=0);
numeric::solve(numer(steig(t))=0,t=2);
numeric::solve(numer(steig(t))=0,t=5);
```

$$\{0.0\}$$

$$\{1.836597203\}$$

$$\{4.815842318\}$$

Polarwinkel, bei denen senkrechte Tangenten vorliegen.

```
numeric::solve(denom(steig(t))=0,t=1);
numeric::solve(denom(steig(t))=0,t=3);
numeric::solve(denom(steig(t))=0,t=6);
```

$$\{0.6532711871\}$$

$$\{3.292310021\}$$

$$\{6.361620392\}$$

Steigungen in den Nullstellen

```
simplify(steig(k*PI)) $ k=1..10;
```

$$2\cdot\pi,\ 4\cdot\pi,\ 6\cdot\pi,\ 8\cdot\pi,\ 10\cdot\pi,\ 12\cdot\pi,\ 14\cdot\pi,\ 16\cdot\pi,\ 18\cdot\pi,\ 20\cdot\pi$$

Steigungen in den Durchgängen durch die y-Achse

```
simplify(steig((2*k+1)/2*PI)) $ k=1..10;
```

$$-\frac{1}{3\cdot\pi},\ -\frac{1}{5\cdot\pi},\ -\frac{1}{7\cdot\pi},\ -\frac{1}{9\cdot\pi},\ -\frac{1}{11\cdot\pi},\ -\frac{1}{13\cdot\pi},\ -\frac{1}{15\cdot\pi},\ -\frac{1}{17\cdot\pi},\ -\frac{1}{19\cdot\pi},\ -\frac{1}{21\cdot\pi}$$

Rechts und links werden die Nulldurchgänge immer steiler,
oben und unten immer flacher.

##

Betrachtung der Fläche

```
iterm:=x->1/2*int(t, t=0..2*k*PI): iterm(x)
```

$$\pi^2\cdot k^2$$

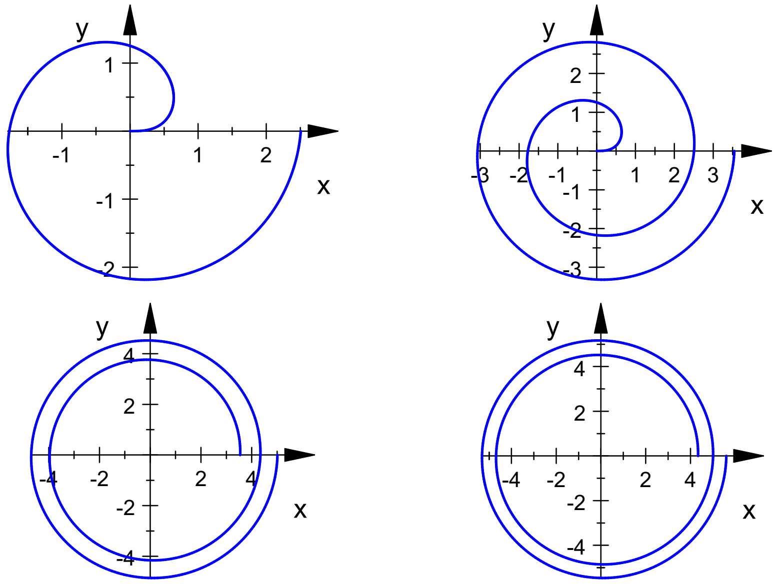
Bei der polaren Flächenbestimmung wird bei jeder Runde das Innere ganz überstrichen. Daher ist bei k Runden nur der letzte Ring einmal in der mit dem Integral berechneten Fläche, der vorige doppelt , davor dreifach und so weiter.


```
t1:=0:iterm(2*k*PI) $ k=1..4
```

$$\pi^2,\ 4\cdot\pi^2,\ 9\cdot\pi^2,\ 16\cdot\pi^2$$

```
sc1:=plot::Scene2d(plot::Polar([sqrt(t),t],t=0..2*PI,
Mesh=500)):
sc2:=plot::Scene2d(plot::Polar([sqrt(t),t],t=0..4*PI,
Mesh=500)):
sc3:=plot::Scene2d(plot::Polar([sqrt(t),t],t=4*PI..8*PI,
Mesh=500)):
sc4:=plot::Scene2d(plot::Polar([sqrt(t),t],t=6*PI..10*PI
, Mesh=500)):

plot(sc1,sc2,sc3,sc4)
```



Die 1. Fläche bis 3. Flächen der Ringe sind

```
PI^2,4*PI^2-2*PI^2,9*PI^2-2*(4*PI^2-2*PI^2)-3*PI^2
```

$$\pi^2, 2 \cdot \pi^2, 2 \cdot \pi^2$$

Die 4. Fläche

```
PI^2*(16-2*2-3*2-4*1)
```

$$2 \cdot \pi^2$$

Die k-te Fläche

```
PI^2*(k^2-2*sum(k,k=2..(k-1))-k*1);
expand(%)
```

$$-\pi^2 \cdot (k + k \cdot (k-1) - k^2 - 2)$$

$$2 \cdot \pi^2$$

Erstaunliches Ergebnis: alle die Spiralenringe haben den Flächeninhalt $2 \cdot \pi^2$

##

Betrachtung von Kreisringen, die auch durch die rechten

Betrachtung von Kreisringen, die auch durch die rechten Achsenschnittpunkte
gehen.

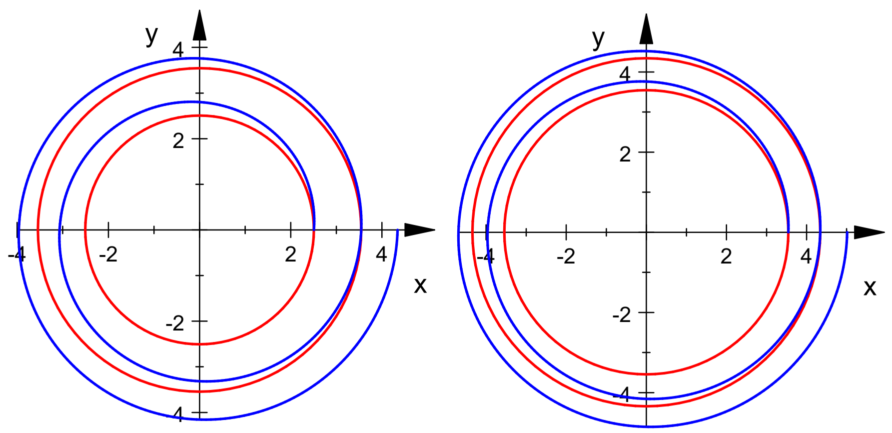
```
PI*2*(k+1)*PI-PI*2*k*PI;
expand(%)
```

$$2 \cdot \pi^2 \cdot (k+1) - 2 \cdot \pi^2 \cdot k$$

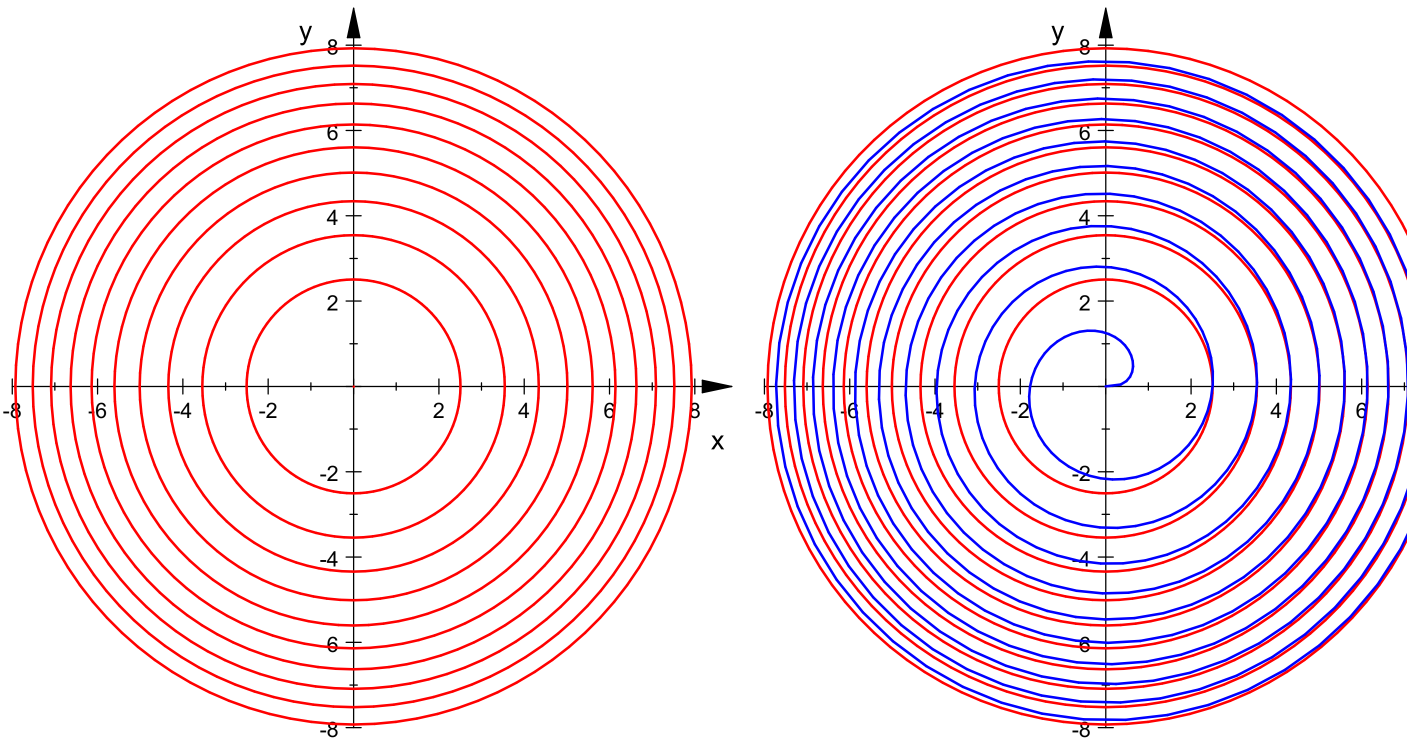
$$2 \cdot \pi^2$$

Auch diese Ringe haben in jeder Größe den Flächeninhalt $2 \cdot \pi^2$.

```
kr1:=plot::Circle2d(sqrt(2*k*PI)|k=1,[0,0],
LineColor=[1,0,0]):
kr2:=plot::Circle2d(sqrt(2*k*PI)|k=2,[0,0],
LineColor=[1,0,0]):
sc1:=plot::Scene2d(kr1,kr2,plot::Polar([sqrt(t),t],t=2*P
I..6*PI, Mesh=500)):
kr3:=plot::Circle2d(sqrt(2*k*PI)|k=2,[0,0],
LineColor=[1,0,0]):
kr4:=plot::Circle2d(sqrt(2*k*PI)|k=3,[0,0],
LineColor=[1,0,0]):
sc2:=plot::Scene2d(kr3,kr4,plot::Polar([sqrt(t),t],t=4*P
I..8*PI, Mesh=500)):
plot(sc1,sc2)
```




```
kreise:=(plot::Circle2d(sqrt(2*(k-1)*PI),
LineColor=[1,0,0]) $ k=1..11):
sc1:=plot::Scene2d(kreise):
sc2:=plot::Scene2d(kreise,sp):
plot(sc1,sc2)
```


y
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
x
y
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
2
4
6