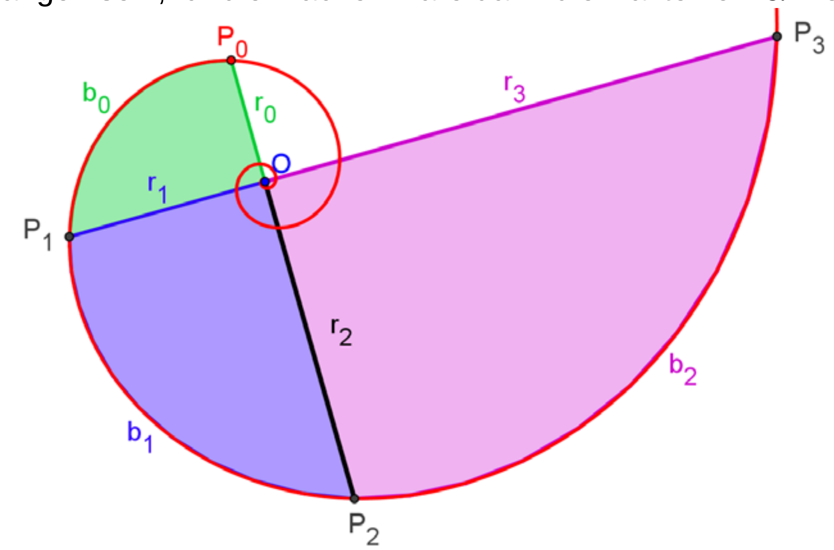
Goldene Spirale in Polarkoordinaten

Nach einer Anregung von Hartmut Müller-Sommer, Vechta, Poster GDM Freiburg 20011

Es handelt sich um eine Exponential-Spirale, also einer mit exponentieller Formel in Polarkoordinaten. Meist sagt man verwirrenderweise „logarithmische Spirale“ dazu.

$$r(\theta) = \phi^{\frac{2}{\pi}\theta} \quad \text{mit } \phi = \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) = 1.6180\ldots \text{ gemäß dem goldenen Schnitt.}$$

Der Faktor im Exponenten vor θ sorgt dafür, dass sich die Eigenschaften geometrisch schön deuten lassen. Statt des rechten Winkels könnte es auch ein anderer Winkel α bei den Längen sein, für die Flächen wäre dann die Hälfte von α wesentlich.



Bei Vergrößerung von θ um $\frac{\pi}{2}$ wachsen die Radien und die Bögen exponentiell mit Faktor ϕ.

Also: $r_{i+1} = r_i \cdot \phi$

$b_{i+1} = b_i \cdot \phi$

Mit anderem Faktor gilt das für alle Exponential-Spiralen.

Additivität (nur hier!)

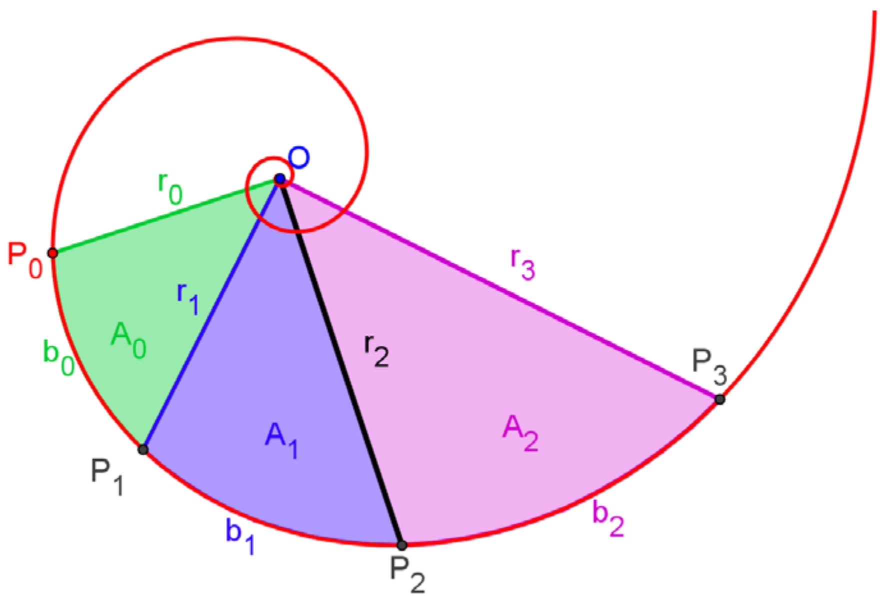
$r_0 + r_1 = r_2$

$r_1 + r_2 = r_3$ …..

$b_0 + b_1 = b_2$ ….

Beweis für die Additivität, braucht : $(1+\phi) = \phi^2$, die Goldene-Schnitt-Eigenschaft: (Bögen ebenso)

$$r_0 + r_1 = r_0 + \phi \cdot r_0 = (1+\phi)\, r_0 = \phi^2 r_0 = r_2$$



Bei Vergrößerung von θ um $\frac{\pi}{4}$ wachsen die Sektorenflächen exponentiell mit Faktor ϕ.

Also: $A_{i+1} = A_i \cdot \phi$

Mit anderem Faktor gilt das für alle Exponential-Spiralen.

Additivität (nur hier!)

$A_0 + A_1 = A_2$

Hier aber $r_i \cdot \sqrt{\phi} = r_{i+1}$

$b_i \cdot \sqrt{\phi} = b_{i+1}$ ….

Der Vergleich mit der geometrisch aus Viertelkreisen konstruierten Goldenen Schnecke erfolgt auf Extraseite.