Prof. Dr. Dieter Riebesehl, Leuphana Universität Lüneburg, 12.3. 2011

Spiralen in einer Folge von drehgestreckten Quadraten

Quadrat $ABEF$ wird drehgestreckt um den Drehpunkt G und ergibt das Quadrat $BCKD$, der Streckfaktor ist $k < 1$. Die Spirale mit Zentrum G soll durch die Punkte K, B, F usw. gehen. Dann liegt auch der Punkt T, Schnittpunkt von $c = \overline{AG}$ und dem Kreis durch B und F mit Mittelpunkt E auf der Spirale.

Das ist z.B. sicher dann so, wenn $x = \overline{TG}$ die mittlere Proportionale von f und $\overline{FG}$ und $\phi = 45^o$ ist. Das soll nun gezeigt werden.

Zuerst der Winkel: ϕ sieht die Strecke $\overline{AB}$ vom Kreispunkt G aus, vom Mittelpunkt M aus sieht man diese Strecke aber unter einem rechten Winkel.

Nun werden verschiedene Strecken ausgerechnet. (das ist etwas langwierig, aber ich kann es nicht besser)

$$\begin{aligned} b &= k \cdot a \\ d &= k \cdot c \\ c^2 &= (a+b)^2 + d^2 \\ 2a^2 &= z^2 + c^2 \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} c &= a\frac{1+k}{\sqrt{1+k^2}} \\ z &= a\frac{1-k}{\sqrt{1+k^2}} \end{aligned}$$

Für $x = \overline{TG}$ ergibt sich wegen $x^2 + z^2 = a^2$

$$x = a\frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{1+k^2}}$$

Weiter:

$$\begin{aligned} y = \overline{HG} &= \frac{b}{a+b}c = \frac{k}{1+k}c \\ u = \overline{HB} &= \frac{a}{a+b}d = \frac{1}{1+k}k \cdot c = y \text{ (!)} \end{aligned}$$

Also ist $f = \sqrt{2} \cdot y$,

$$f = a\frac{\sqrt{2} \cdot k}{\sqrt{1 + k^2}}$$

und man rechnet mit $f = k \cdot \overline{FG}$ nach:

$$x^2 = f \cdot \frac{f}{k},$$

wie gewünscht, qed.