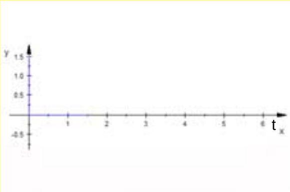
Polarkoordinaten besser verstehen

durch bewegliche und gleichzeitige Darstellung der zugehörigen kartesischen Funktion

$$r = r(t) = \cos(t) + \tfrac{1}{2}$$



Prof. Dr. Dörte Haftendorn Universität Lüneburg http:haftendorn.uni-lueneburg.de

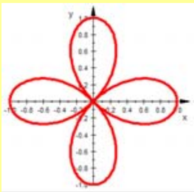
Warum eigentlich Polarkoordinaten?

- Weil sie wunderbare Mathematik ermöglichen
- Weil sie ein Stück Welt erschließen
- Weil Lernende in selbst auf Erkundung gehen können
- Weil Günter Steinberg schon vor Jahren 1000 Gründe genannt hat
- ....

- Weil wir doch wohl eine Antwort haben sollten, was solche Menü-Einträge bedeuten.

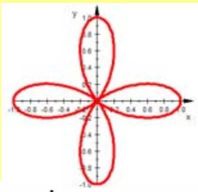
Aber das ist längst nicht Alles!

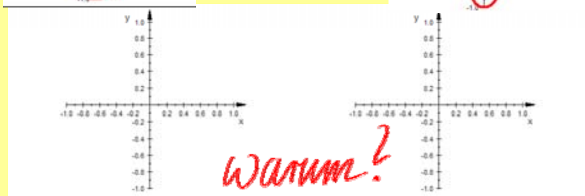
Prof. Dr. Dörte Haftendorn Universität Lüneburg http:haftendorn.uni-lueneburg.de



Wie werden die Kosinus-Rosetten durchlaufen?

aha!





warum?

Prof. Dr. Dörte Haftendorn Universität Lüneburg http:haftendorn.uni-lueneburg.de

Was Sie in diesem Vortrag erwartet

- Einleitung
- Erklärungsidee
  - mit verschieden Werkzeugen
- Durchführung an verschiedenen Beispielen
- Blick auf Weiterführungen

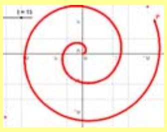
die Antwort!

- Blick auf das Potential für das Lernen von Mathematik
- Schluss

Und alles steht im Internet

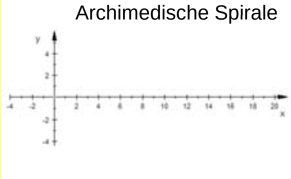
Prof. Dr. Dörte Haftendorn Universität Lüneburg http:haftendorn.uni-lueneburg.de

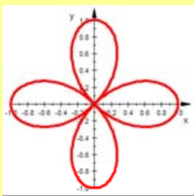
Wie kann man den Durchlauf verstehen?



ggb

Archimedische Spirale



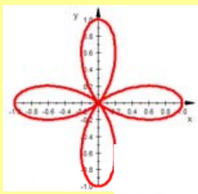


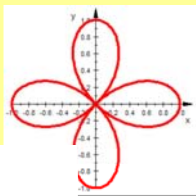
ggb

GeoGebra

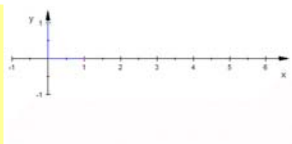
Prof. Dr. Dörte Haftendorn Universität Lüneburg http:haftendorn.uni-lueneburg.de

polar-kartesisch-Koppelung





ggb



ggb

GeoGebra

Prof. Dr. Dörte Haftendorn Universität Lüneburg http:haftendorn.uni-lueneburg.de

polar-kartesische-Koppelung mit Euklid-Dynageo

Spirale

Sin-Panne

Cos-Panne

Cos richtig

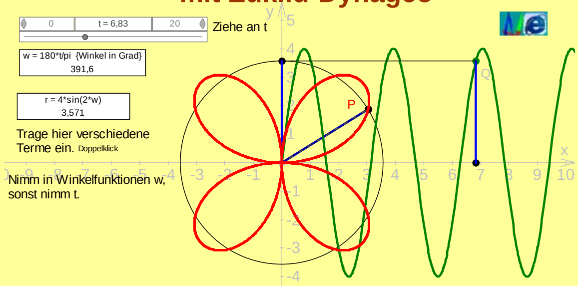
In Euklid-Dynageo erfordern die trigonometrischen Funktionen als Argument Winkel im Gradmaß.

Cos(2t) Polar-kartsesisch Noch eine Panne

In Euklid-Dynageo bekommt man leicht Probleme mit dem „Punktsprung-Phänomen"

Cos(2t) Polar-kartesesisch Dieses stimmt.

polar-kartesische-Koppelung mit Euklid-Dynageo



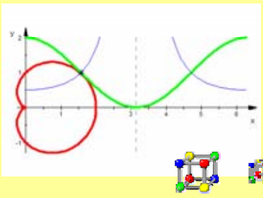
R(t)= 4 cos(2t) polar-kartsesische-Koppelung

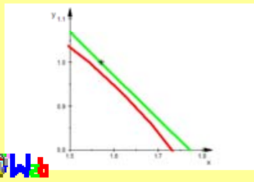
Prof. Dr. Dörte Haftendorn Universität Lüneburg http:haftendorn.uni-lueneburg.de

polar-kartesische-Koppelung mit MuPAD

Experimentierfeld

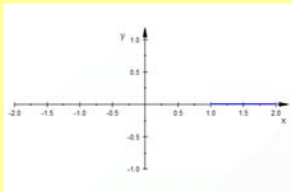
Internetseite dazu





Prof. Dr. Dörte Haftendorn Universität Lüneburg http:haftendorn.uni-lueneburg.de

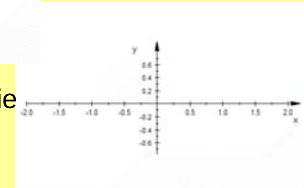
Eine Konchoide der Kosinus-Rosette...



$$r(t) = \cos(2t) + 1$$

..ist die Doppel-Ei-Linie

$$r(t) = 2\cos(t)^2$$



Prof. Dr. Dörte Haftendorn Universität Lüneburg http:haftendorn.uni-lueneburg.de

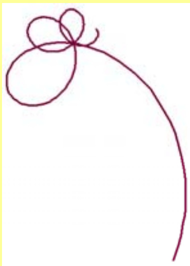
Polarblume (Staatsex. Aufgabe)

Es ist $r(\varphi) = \frac{1}{\varphi - 1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi\right)$ gegeben.

a) Entwickeln Sie einen kartesischen Graphen hierzu aus zwei Bausteinen für $\varphi \geq 0$. (Siehe auch Teil c)

b) Rechts ist der Polar-Graph im Intervall [2, 10] dargestellt. Zeichnen Sie rechts ein Koordinatensystem ein und bestimmen Sie für Anfangs- und Endpunkt Gradmaß, Radius und kartesische Koordinaten.
Kennzeichnen Sie in Ihrem Bild aus a) die Entsprechungen dieser drei Blätter.

c) Bestimmen Sie exakt $\lim_{\varphi \to 1} r(\varphi)$.
Warum zeigt der TI im 3. Quadranten eine Lücke? Zeichnen Sie hier (durch den Text hindurch) die Polarblume von $\varphi = 0$ an.
Wie sieht sie für immer größer werdende Winkel aus?



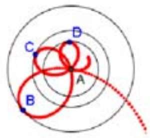
Prof. Dr. Dörte Haftendorn Universität Lüneburg http:haftendorn.uni-lueneburg.de

Polarblume (Staatsex. Aufgabe)

d) Bestimmen Sie numerisch mit TI und mit dem Keplerverfahren den Flächeninhalt des größten der oben dargestellten Blätter.
Ermitteln Sie auch einen groben Näherungswert durch Einzeichnen und Auswerten einer elementaren Figur.
Erkären Sie, warum das Keplerverfahren hier keinen sonderlich guten Wert liefert.

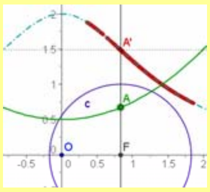
e) Bestimmen Sie für dieses Blatt den vom Ursprung am weitesten entfernten Punkt als relatives Maximum von r (mit Ableitung von Hand, numerische Auswertung der Ableitung mit TI).
Welche Möglichkeiten haben Sie, ohne Ableitung an numerische Werte zu kommen?
Warum kann man keine exakten Werte anstreben?

f) In einem Dynamischen-Mathematik-System könnte man in der gezeigten Art Kreise „aufziehen". Begründen Sie, warum es für jedes Blatt genau einen solchen „Berührkeis" gibt.
Beziehen Sie dies auf Ihre bisherige Aufgabenbehandlung.
Was lässt sich zu der Folge der Kreisradien und der Folge der Winkelstellungen der Berührpunkte B, C, D,... sagen?



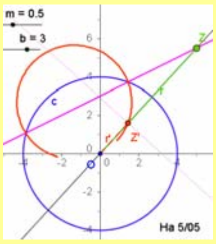
Prof. Dr. Dörte Haftendorn Universität Lüneburg http:haftendorn.uni-lueneburg.de

Inversion



$$r = r(\varphi)$$

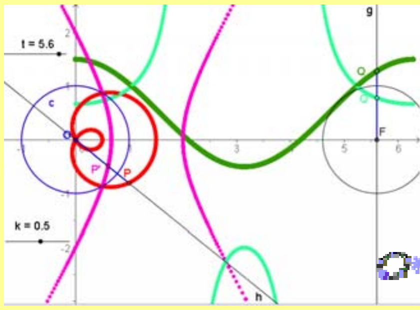
$$r = \frac{1}{r(\varphi)}$$



$$y = f(x)$$

$$y = \frac{1}{f(x)} \qquad z.B. \quad r = \cos(\varphi) \qquad r = \frac{1}{\cos(\varphi)}$$

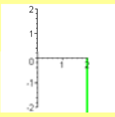
Inversion der Pascalschen Schnecken

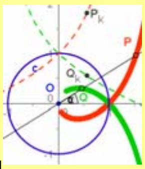


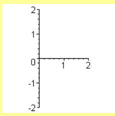
Inversion der Strophoide

Die grüne und die rote Kurve sind invers zueinander, das Produkt der Terme ist 1

$$r(t) = \frac{1-\sin(t)}{\cos(t)} \qquad r(t) = \frac{1+\sin(t)}{\cos(t)}$$





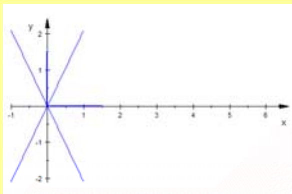


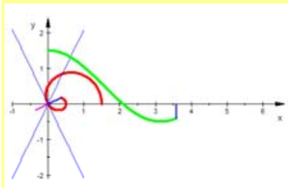
Für Winkel im 1. Quadranten ist r stets kleiner oder gleich 1

Für Winkel im 1. Quadranten ist r stets größer oder gleich 1

Die Strophoide ist eine **analagmatische Kurve:** sie ist Fixkurve bei einer Inversion

Elemente der Analysis stützen





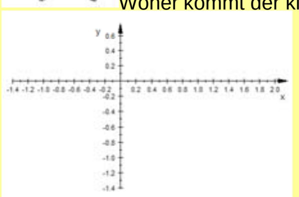
Die Nullstellen in der kartesischen Darstellung zeigen
die Steigungen der Polarkurve
in den Durchgängen durch den Ursprung.

Fragen stellen, Antworten finden

Meine Aufgabe im Buch „Analysis-Aufgaben“
von Steinberg/ Ebenhöh (Schroedel)

$$r(t) = \ln(t)\,\sin(5t)$$

Woher kommt der kleine Zipfel?????????

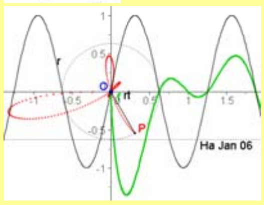


Fragen stellen, Antworten finden

Meine Aufgabe im Buch „Analysis-Aufgaben“
von Steinberg/ Ebenhöh (Schroedel)

$$r(t) = \ln(t)\,\sin(5t)$$

Woher kommt der kleine Zipfel?????????



Da gibt es noch
zwei weitere
Zipfelchen!!!!!!!!!!

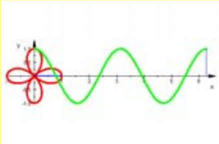
Schlussbemerkungen

Potential für den Unterricht

- Festigung des Funktionsbegriffs als eindeutige Zuordnung
- Bezug der Graphen aufeinander schult mathematische Kompetenz
- Vollständige Freiheit für die Schüler, Kurvenklassen zu bilden
- Aspektewechsel macht das Wesentliche deutlicher
- Reichhaltige Mathematik schützt den Unterricht vor Verkrustung

Polarkoordinaten besser verstehen

durch bewegliche und gleichzeitige Darstellung der zugehörigen kartesischen Funktion



Danke

für Ihre

Aufmerksamkeit

Und alles steht im Internet