Dörte HAFTENDORN, Lüneburg

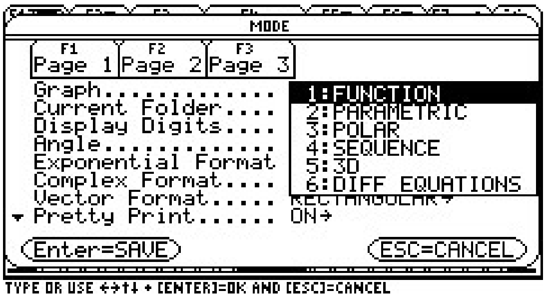
Polarkoordinaten besser verstehen

durch bewegliche und gleichzeitige Darstellung der zugehörigen „kartesischen Funktion".

Bei mathematischen Objekten, die in Polarkoordinaten dargestellt werden, ist es mitunter gar nicht so leicht zu sehen, wie sie bei wachsendem Winkel durchlaufen werden. Stellt man nun aber in derselben Zeichnung geometrisch gekoppelt zu $P=(\varphi,r(\varphi))_{polar}$ auch $P'=(\varphi,r(\varphi))_{kartesisch}$ dar, so entstehen zwei Ortskurven gleichzeitig, die eineindeutig aufeinander bezogen sind. So kann mit jeder vertrauten kartesischen Funktion eine entsprechende „Polarfunktion" erkundet werden. Besonders eignen sich dafür DMS wie GeoGebra und CAS wie MuPAD 3. Von den heutigen Werkzeugen werden „Polarkoordinaten" angeboten und der Mathematikunterricht kann damit auf jedem Niveau von der 8. Klasse bis zum 8. Semester kreatives Mathematiklernen fördern.

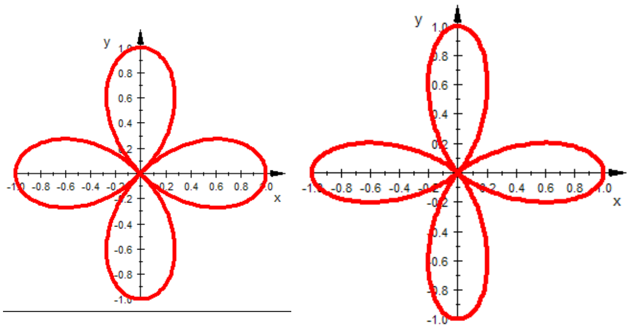
Warum sollte man Polarkoordinaten behandeln?

- Weil sie wunderbare Mathematik ermöglichen
- Weil sie ein Stück Welt erschließen
- Weil Lernende selbst auf Erkundung gehen können
- Weil G. Steinberg [St] schon vor Jahren 1000 Gründe genannt hat
- Weil die Computerwerkzeuge die Option anbieten und die Lehre ja wohl nicht ernsthaft flüchten kann vor dieser Wirklichkeit.



Polar-kartesisch-Koppelung

Diese beiden Rosetten werden auf veschiedene Art durchlaufen, was man dem fertigen Bild überhaupt nicht ansehen kann. Erzeugt man sie mit einem Graphenzeichner, der mit wachsendem Polarwinkel den Graphen

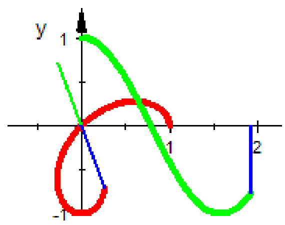


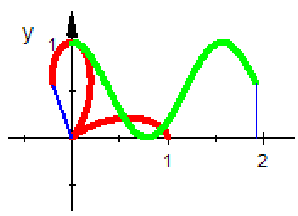
sukzessive aufbaut, so kann man den Durchlauf sehen. Verstehen kann man ihn aber erst, wenn man über die definierenden Funktionen nachdenkt.

Es sind dies hier

$r(\varphi) = \cos(2\varphi)$ (links)

und $r(\varphi) = \cos(2\varphi)^2$ (rechts).





Gezeichnet sind die Funktionen sowohl polar als auch kartesisch $r(\varphi)$ über φ. Dementsprechend ist der Polarradius sowohl vom Ursprung aus als auch als Ordinate eingezeichnet. Beim linken Bild ist zusätzlich der Betrag von $r(\varphi)$ zu sehen. Bei negativem $r(\varphi)$ ist der gezeichnete Polarwinkel nämlich $\varphi + \pi$. Es gibt Schulbücher, die keine negativen Polarradien zulassen. Dann dürfte es diese Rosetten nicht geben.

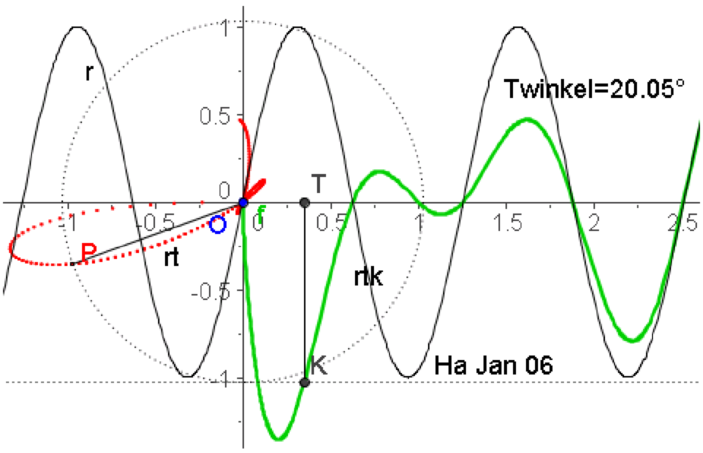
Die gezeigten Bilder lassen sich in diesem Aufsatz nicht animiert darstellen. Alle interaktiven Dateien, animierte Graphen und der Vortrag sind auf [Ha Website] zugänglich. Im Vortrag wurde eine interaktive Möglichkeit mit GeoGebra www.geogebra.at vorgestellt, bei der der Polarradius und die zugeordnete Ordinate auch geometrisch aufeinander bezogen sind und die Rosette und ihre kartesische Darstellung gleichzeitig erkundet werden können. Es ist eine der Stärken von GeoGebra, dass nachträglich noch für $r(\varphi)$ andere Terme eingesetzt werden können. Damit kann der einmal verstandene Zusammenhang in eigener Regie der Lernenden an beliebigen Funktionen ausprobiert werden. Durch diese doppelte Sicht wird das Funktionsverständnis auf ganz neue Weise vertieft. Es ist eine bedauerliche Einschränkung, dass der Funktionsbegriff als eindeutige Zuordnung eines Argumentes zu einem Funktionswert stets nur kartesisch gesehen wird.

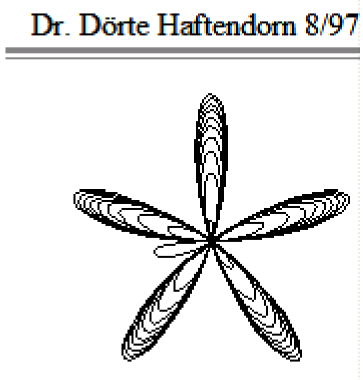
Obige Bilder sind als animierte Graphen mit MuPAD 3 www.mupad.de erzeugt. Das ist ein deutsches CAS, das sich in der neuen Version in ganz besonderer Weise den Bedürfnissen der Lehre in Schule und Hochschule verschrieben hat. In diesem Zusammenhang ist es wichtig, dass Graphikelemente verschiedener Definitionstypen miteinander kombiniert werden können. Das ist mit kleineren Werkzeugen (Derive, TI-voyage, Casio-ClassPad u.a.) i.d.R. nicht möglich, da man sie auf „Polarkoordinaten“ umstellen muss. Allenfalls könnte man sich geschickt mit den passenden Parameterdarstellungen helfen: $x = x(t) = r(t) \cdot \cos(t)$

$y = y(t) = r(t) \cdot \sin(t)$ für die Polarkurve und $x = x(t) = t$ und $y = r(t)$ für die zugeordnete kartesische Funktion. Hilfreich sind auch schon nebeneinander gestellte Graphen von Polarkurve und kartesischer Funktion, die dann an den interessanten Punkten aufeinander bezogen werden können. In dieser Art hat die Autorin schon 30 Jahre lang gute Erfahrungen gemacht.

Besondere Funktionen

$$r(t) = \ln(t)\,\sin(5t)$$



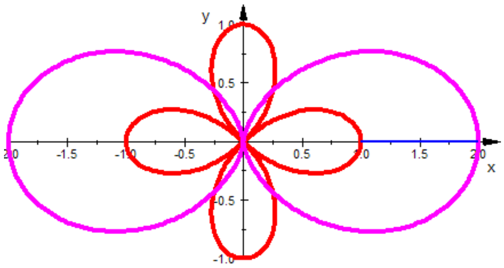


Diese Propeller-Aufgabe hat die Autorin vor vielen Jahren in dem von Steinberg und Ebenhöh herausgegebenen Buch [StE] veröffentlicht. Inzwischen sind interaktive Möglichkeiten der Erforschung gegeben. Der Sinus-Term erzeugt auf klare Weise für größere Polarwinkel die fünf Propeller-Blätter. Woher kommt aber das kleine zusätzliche Blatt? Genaueres Hinsehen auf die polar-kartesische Darstellung zeigt, dass der Logarithmusanteil sogar für drei winzige Blättchen sorgt. Für t gegen 0 ist eine Grenzwertbetrachtung, z.B. mit der l'Hospital-Regel, notwendig.

Diese Aufgaben erlauben ersichtlich einen reichhaltigen Analysisunterricht. Dazu trägt auch die Erkenntnis bei, dass die Nullstellen der kartesischen Darstellung die Tangenten-Steigungswinkel der Polarkurven bei ihren Durchgängen durch den Ursprung angeben. Obiges Bild zeigt, dass es eine einzige Tangente gibt (nämlich die mit m=tan(1)), deren Steigungswinkel kein Vielfaches von $\pi / 5$ ist. Es sind hier Fragestellungen für Klausuren mit und ohne Werkzeugeinsatz von der Schule bis zum Staatsexamen möglich.

Besondere Kurven: Konchoiden

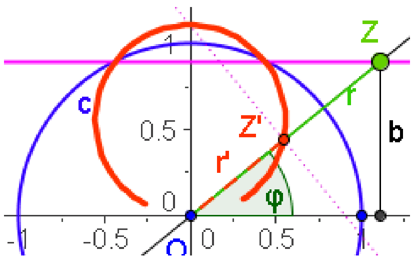
Die bekanntesten Konchoiden sind die Hundekurve oder Konchoide des Nikomedes und die Pascalschen Schnecken. Konchoiden erlauben schulgemäße handelnde Zugänge [Ha Kurven]. Ihre Entstehung kann in folgendes Bild gefasst werden: „Herrchen“ wandert auf einer „Straße“ und sein „Hund“ strebt an einer Leine der Länge k einem „Baum“ zu, den man im Ursprung platziert. Ist $r = r(\varphi)$ die Polargleichung der Straße, dann ist $r = r(\varphi) \pm k$ die Polargleichung der zugehörigen Konchoidenschar. Bei der polar-kartesischen Koppelung ist die kartesische Funktion ganz einfach nur senkrecht zu verschieben. Daher können Lernende zu allen Polargleichungen Konchoiden untersuchen. Zum Beispiel ist eine Konchoide der Rosette die Doppel-Ei-Linie.



Besonderer Zusammenhang: Inversion am Einheitskreis

$$y = f(x) \quad r = r(\varphi)$$

$$y = \frac{1}{f(x)} \quad r = \frac{1}{r(\varphi)}$$

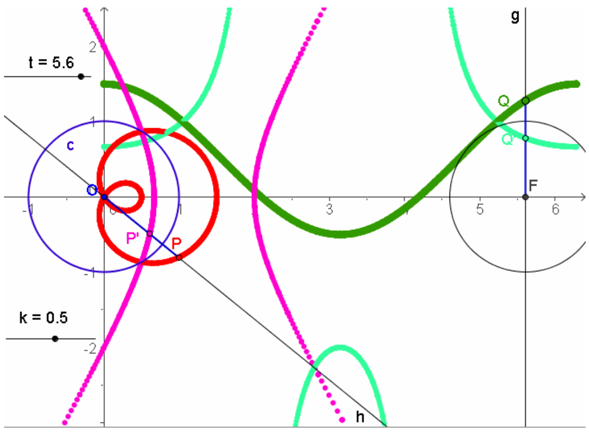


$$r = \frac{b}{\sin(\varphi)}$$

$$r = \frac{1}{b}\sin(\varphi)$$

Die algebraisch inverse Funktion lässt sich durch geometrische Inversion am Einkeitskreis gewinnen. Dieser Zusammenhang öffnet ein ganzes Feld lohnender Untersuchungen.

Eine Pascalsche Schnecke mit Schlaufe hat also als kartesisch zugeordnete Funktion einen um weniger als 1 hochgeschobenen Kosinus. Dessen algebraisch Inverses hat Pole und ist die kartesisch gekoppelte Funktion zu einer Hyperbel. Diese wiederum ist das geometrisch Inverse zur Pascalschen Schnecke. Das Inverse der Kardioide ist die Parabel und die Pascalschen Schnecken ohne Schlaufe oder Spitze haben Ellipsen als Inverse.



Fazit: Es zeigt sich, dass man mit Polarkoordinaten –insbesondere bei polar-kartesischer-Koppelung– in besonders schöner Weise mathematische Zusammenhänge erkunden kann.

Literatur: [St] Günter Steinberg, Polarkoordinaten, Metzler 1993, [StE] Steinberg und Ebenhöh (Hrsg) Ausgewählte Aufgaben zur Analysis, Schroedel 1998,
[Ha Website] http://haftendorn.uni-lueneburg.de, [Ha Kurven] dto., Bereich Kurven