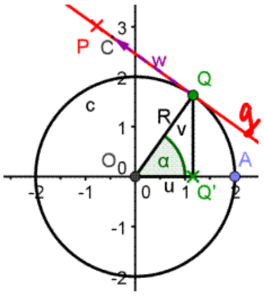
Tangenten an Kreis und Ellipse



1. Vektoriell: $Q(u,v)$ $u^2+v^2=R^2$

$\vec{w}=\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix}$ $\vec{q}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ $g:\ \vec{p}=\vec{q}+s\vec{w}$ $\vec{p}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix}$

Parameterdarstellung von g $\quad x=u-sv$, $y=v+su$

Implizite Gleichung von g

s eliminieren $\quad xu=u^2-suv$

$+\ yv=v^2+suv$

$xu+yv=u^2+v^2$

g ist Tangente an den Kreis im Punkt Q

$xu+yv=R^2$ implizite Gleichung

2. Analytisch aus der Parameterdarstellung des Kreises $\quad x=R\cos\alpha$, $y=R\sin\alpha$, $\dot{x}=-R\sin\alpha$, $\dot{y}=R\cos\alpha$

$u=R\cos\alpha$, $v=R\sin\alpha$ | Steigung des Kreises im Punkt Q.

$m=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{R\cos\alpha}{-R\sin\alpha}=\frac{u}{-v}$

Gerade mit dieser Steigung durch Q $\quad y=g(x)=-\frac{u}{v}(x-u)+v$

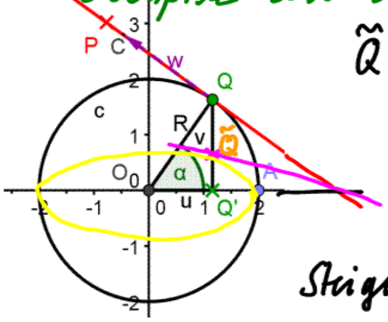
$yv=-ux+u^2+v^2$ $\Rightarrow$ $xu+yv=R^2$ Tangentengleichung

3. Analytisch aus der Funktionsgleichung $\quad y=\sqrt{R^2-x^2}$

Steigung in Q $\quad m=\frac{-u}{\sqrt{R^2-u^2}}=-\frac{u}{v}$ $\quad y'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$

weiter wie oben

4. Ellipse als affines Bild des Kreises



$\tilde{Q}=(\tilde{u},\tilde{v})=(u,\frac{b}{a}v)$ $\quad u^2+v^2=a^2$

$\tilde{u}=u$ $\quad \tilde{v}=\frac{b}{a}v$ $\quad \tilde{u}^2+\frac{a^2}{b^2}\tilde{v}^2=a^2$

$\frac{\tilde{u}^2}{a^2}+\frac{\tilde{v}^2}{b^2}=1$ $\quad$ Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\tilde{u}=a\cos\alpha$

$\tilde{v}=\frac{b}{a}\cdot a\sin\alpha=b\sin\alpha$

Steigung im $\tilde{Q}$ $\quad m=\frac{\dot{\tilde{v}}}{\dot{\tilde{u}}}=\frac{b\cos\alpha}{-a\sin\alpha}=\frac{b\tilde{u}\cdot b}{a(-a)\cdot\tilde{v}}=\frac{b^2}{-a^2}\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}$

Gleichung der Tangente $\quad y=-\frac{b^2}{a^2}\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}(x-\tilde{u})+\tilde{v} \Leftrightarrow a^2y\tilde{v}=-b^2x\tilde{u}+b^2\tilde{u}^2+a^2\tilde{v}^2$

Taufe: $x_0:=\tilde{u}$ $\quad y_0=\tilde{v}$

$b^2xx_0+a^2yy_0=b^2x_0^2+a^2y_0^2$

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1}$$

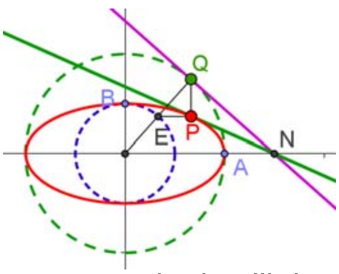
Alternativ: die Kreistangente abbilden

$xu+yv=a^2$ $\quad \tilde{x}=x$ $\quad x_0:=\tilde{u}=u$

$\tilde{y}=\frac{b}{a}y$ $\quad y_0:=\tilde{v}=\frac{b}{a}v$

$\tilde{x}x_0+\frac{a}{b}\tilde{y}\cdot\frac{a}{b}y_0=a^2$ $\quad$ Schreiben im x,y-System

$xx_0+\frac{a^2}{b^2}yy_0=a^2$



Merke:	Implizite Gleichung	Tangente in (u,v)
Kreis	$x^2+y^2=r^2$	$x\cdot u+y\cdot v=r^2$
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x\cdot u}{a^2}+\frac{y\cdot v}{b^2}=1$