

Horner-Schema

hornerschema.pdf

Die Auswertung von Polynomen ist numerisch durchaus heikel. Wegen der Potenzen und der Differenzbildungen ist numerische Instabilität häufig. Jedes Polynom

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

kann man in der Klammerform schreiben

$$p_n(x) = (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-3})x + \dots + a_1)x + a_0$$

Dieser Darstellung entspricht ein Rechenschema, das sich führen von Hand und heute mit TR oder Tabellenkalkulation leicht durchziehen lässt.

	A	B	C	D	E	F
1		a4	a3	a2	a1	a0
2	x	1	-4	-6	4	5
3	-1		-1	5	1	-5
4		1	-5	-1	5	0
5	-1		-1	6	-5	0
6		1	-6	5	0	0
7	1		1	-5	0	0
8		1	-5	0	0	0
9	5		5	0	0	0
10		1	0	0	0	0
11						

Beispiel $p_4(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 5$

In die 1. Zeile schreibt man alle a_i , nicht vorhandene als 0, vorn die Einsetzung x_0 .

Senkrecht wird addiert, hier zuerst B4

das Ergebnis dann mit x_0 multipliziert, ergibt C3, senkrecht addiert ergibt B5 usw.

Als letztes ergibt sich $p(x_0)$. Diese **Berechnung ist numerisch entschieden besser.**

Hier ist $p(-1)=0$. $X=-1$ ist also Nullstelle.

In diesem Fall stehen in der Zeile 4 die Koeffizienten von $\frac{p_n(x)}{x-x_0}$.

Also braucht man gar nicht zu dividieren, man liest einfach ab:

$$p_4(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 5 = (x+1) (x^3 - 5x^2 - x + 5)$$

Da man nun die Nullstellen dieses rechten Faktors sucht, braucht man nur noch auf gleiche Art weiter zu machen. $x=-1$ ist nochmal Nullstelle, also doppelte Nullstelle.

$$p_4(x) = (x+1)^2 (x^2 - 6x + 5)$$

Entweder man löst jetzt die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 5 = 0$ oder macht

weiter. Da als ganzzahlige Lösungen nur die Teiler der absoluten Gliedes in Frage kommen, ist man mit 1 und 5 schnell beim Ziel

$$p_4(x) = (x+1)^2 (x-1) (x-5)$$

das Polynom ist vollständig zerlegt, wie man es z.B. für die Partialbruchzerlegung braucht.

`factor(x^4-4*x^3-6*x^2+4*x+5)`

Klar ein CAS ist auch so programmiert:

`(x-1) · (x-5) · (x+1)2`

Ist x_0 aber nicht genau Nullstelle, so führt man das Horner-Schema dennoch mit x_0 weiter.

Dann steht nämlich am Ende der Zeile 6 an vorletzter Stelle Platz E6 $p'(x_0)$. Diesen Wert kann man in der Newtonformel für die numerische Nullstellensuche gebrauchen.