

Aufgabe: Heron-Verfahren

Die allgemeine Heron-Formel zur Bestimmung höherer Wurzeln lautet:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{r}{a_n^{k-1}} \right).$$

a) Weisen Sie nach, dass diese rekursive Folge für positive

r den Fixpunkt $a = \sqrt[k]{r}$ hat.

b) Rechts ist die Webdarstellung für $r=8$ gezeichnet.

Um welches k handelt es sich dann?

Verfolgen Sie die hier dargestellten Folgenwerte rechnerisch vier Schritte weit (als Dezimalzahlen).

c) Entwickeln Sie in einer eigenen Zeichnung den Graphen der Trägerfunktion (zu b)) als Mittelwert zweier einfacherer Funktionen.

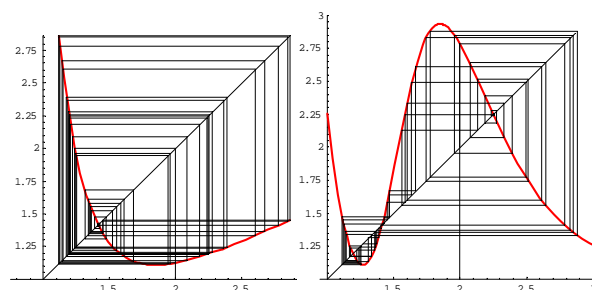
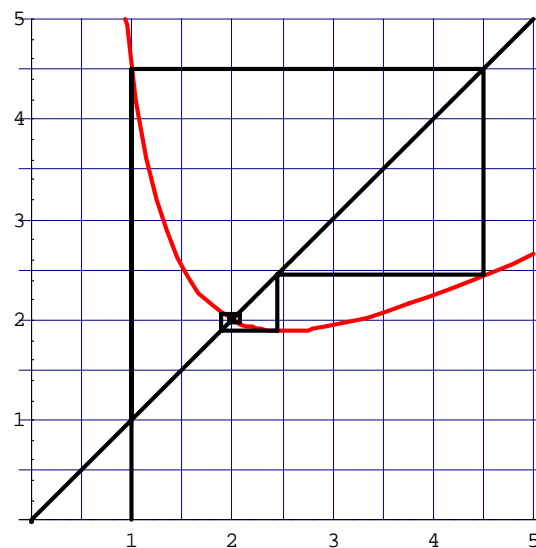
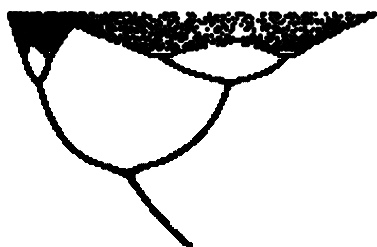
Wie ändert sich der Graph, wenn k wächst?

d) Der in a) berechnete Fixpunkt ist nicht immer anziehend.

Berechnen Sie genau, für welche k und r er anziehend und für welche er abstoßend ist.

e) Für $r=8$ und $k=6$ erhält man für die Trägerfunktion f und für die zweite Iterierte folgende Graphen:

Erläutern Sie den Zusammenhang und begründen Sie das Verhalten der Folge qualitativ.



f) Bei der logistischen

Parabel haben Sie ein "Feigenbaum-Diagramm" kennengelernt.

In gleicher Weise entsteht hier ein "Heron-Feigenbaum-Diagramm", wenn k variiert wird. Im Bild zeigt die Hochachse k von 3 bis 6.

Erläutern Sie die Graphik.

Wo finden sich die betrachteten Fälle wieder?

Als Erkundung mit Turboplot:

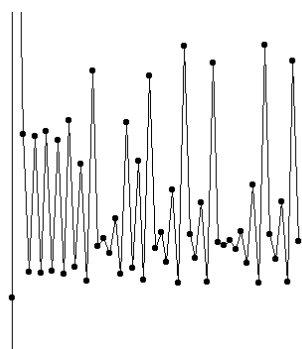
Wählen Sie "Iteration".

Tragen Sie die Trägerfunktion ein.

Experimentieren Sie mit verschiedenen r und k.

Das Feigenbaum-Diagramm heißt dort "Attraktordiagramm".

k muss a heißen und ist an der Rechtsachse abgetragen.



Die Trägerfunktion selbst heißt "erste Iterierte".

Sehen Sie sich an unter welchen Winkeln die zweiten Iterierten für $a=4,5$ die Wh schneiden. Wie hängt die Beobachtung mit dem Attraktordiagramm zusammen?

Sehen Sie sich auch das "Schaubild der Folge" an.

