Analysis Krümmung

Dr.Dörte Haftendorn Universität Lüneburg BBS-Lehramts-Studiengang **Am Beispiel der Parabel** 21. Juni 1997 (2007)

f sei eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt:

Krümmung $K(x) = \dfrac{f''(x)}{\sqrt{(1+f'[x]^2)^3}}$ und Krümmungsradius $R(x) = \dfrac{1}{K(x)} = \dfrac{\sqrt{(1+f'(x)^2)^3}}{f''(x)}$

Im Scheitel ist $x=0$ und $f'(x)=0$. Daher gilt dort $K(0) = f''(0)$ und $R(0) = \dfrac{1}{f''(0)}$

Parabel, Funktion und Ableitungen

$$f(x) = a\,x^2$$
$$f'(x) = 2\,a\,x$$
$$f''(x) = 2\,a$$

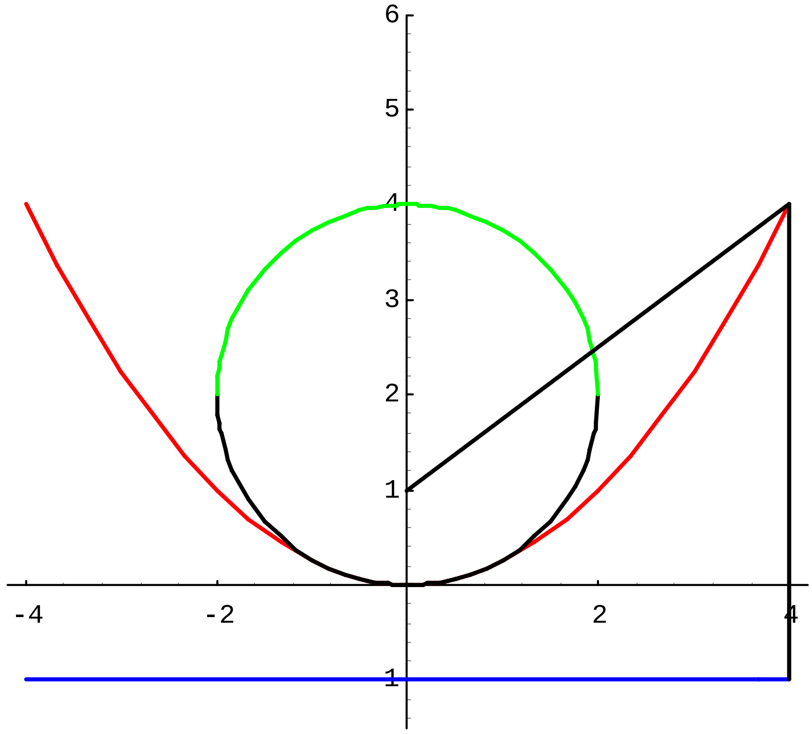
Damit ergibt sich für Krümmung und Krümmungskreisradius

$$K(x) = \frac{2\,a}{\sqrt{1+4\,a^2\,x^2}^{\,3}}$$

$$R(x) = \frac{\sqrt{1+4\,a^2\,x^2}^{\,3}}{2\,a}$$

Nun ist im Scheitel $x=0$. Die Brennweite f ist p/2 Hier f=1, p=2, a=1/4

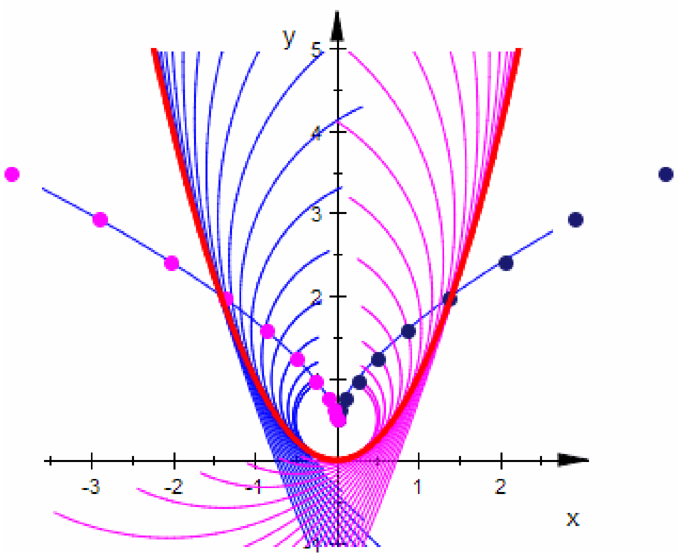
Mit $a = \dfrac{1}{4f} = \dfrac{1}{2p}$ folgt $R = \dfrac{1}{2a}$, $R = 2f = p$



für den Scheitelradius.
Die Gleichungen für Tangente und Normale sind stets:

$$y - y_0 = f'(x)\,(x - x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x)}\,(x - x_0)$$



Der Krümmungskreismittelpunkt zu einem Punkt P auf der Parabel liegt im Abstand R in der passenden Richtung auf der Normalen.
Die Kurve der Krümmungskreismittelpunkte einer Kurve heißt allgemein **Evolute** der Kurve.
Die Berühr-Radien der Krümmungskreise liegen auf den die Normalen der Parabel und diese sich gleichzeitig die Tangenten der Evolute.
Die Evolute ist die **Enveloppe** (Einhüllende, Hüllkurve) der Parabelnormalen.
Die Parabel ist daher eine **Evolvente** (Abrollkurve) ihrer eigenen Evolute.