Parabel Bogenlänge

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, MuPAD 4, http://haftendorn.uni-lueneburg.de Aug.06

Anfrage: Tobias Beck 11.08.06

Ich habe eine Parabel der Form f(x)=x²/ 4T

Ich benötige nun eine Formle mit der ich die Bogenlänge der Parabel zwischen X=0 und X Element R berechnen kann. Des weiteren benötige ich eine Formel mit der ich bei einer gegebenen Bogenlänge der Parabel die X- und Y- Koordinaten ermitteln kann.

Mein Ansatz ist folgender: Bogenlänge ist s = Integral von 0 bis X von Wurzel aus 1+f'(x)² nach x

Da ich aber keinerlei Ahnung von ableiten und integrieren habe ist für mich hier Schluß.

```
f:=x->x^2/(4*T); f(x); f'(x);
```

$$x \to \frac{x^2}{4 \cdot T}$$

$$\frac{x^2}{4 \cdot T}$$

$$\frac{x}{2 \cdot T}$$

Bogenlänge von 0 bis X

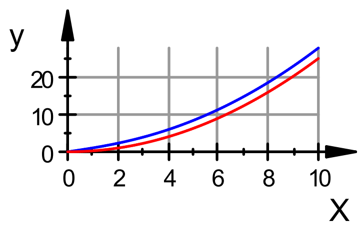
```
assume(T>0);
bog:=int(sqrt(1+(f'(x))^2), x=0..X)
```

$$(0, \infty)$$

$$T \cdot \left(\ln\left(X + \sqrt{4 \cdot T^2 + X^2}\right) - \frac{\ln\left(4 \cdot T^2\right)}{2} + X \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot T^2 + X^2}{16 \cdot T^4}} \right)$$

Dies ist die Formel, die für T und X die Bogenlänge von 0 bis X liefert.

```
bogen_g:=plot::Function2d(bog|T=1,X=0..10):
par_g:=plot::Function2d(f(x)|T=1,x=0..10,LineColor=[1,0,0]):
plot(bogen_g,par_g, GridVisible=TRUE)
```



(Graphik größer s.u.) Hier kann man für T=1 zu jeden X den Parabelwert und den Bogenlängenwert ablesen.

Man kan aber auch umgekehrt für T=1 zur Bogenlänge das X und das y ablesen.

Beispiel Bogen 15 ergibt X=7 und Y etwa 12 abgelesen (berechnet 49/4)

```
f(7)
```

$$\frac{49}{4 \cdot T}$$

Für andere T muss man andere Graphen machen. Ein Termvereinfachung ist zu hoffen, wenn X
ein Vielfaches von T ist. Daher wird gesetzt x=k T, x wird also in Vielfachen von T gemessen.

```
bog2:=simplify(bog|X=k*T)
```

$$T \cdot \ln\left(T \cdot \left(k + \sqrt{k^2+4}\right)\right) - T \cdot \ln(2 \cdot T) + \frac{T \cdot k \cdot \sqrt{k^2+4}}{4}$$

Mit ein wenig Umfomungsschick:

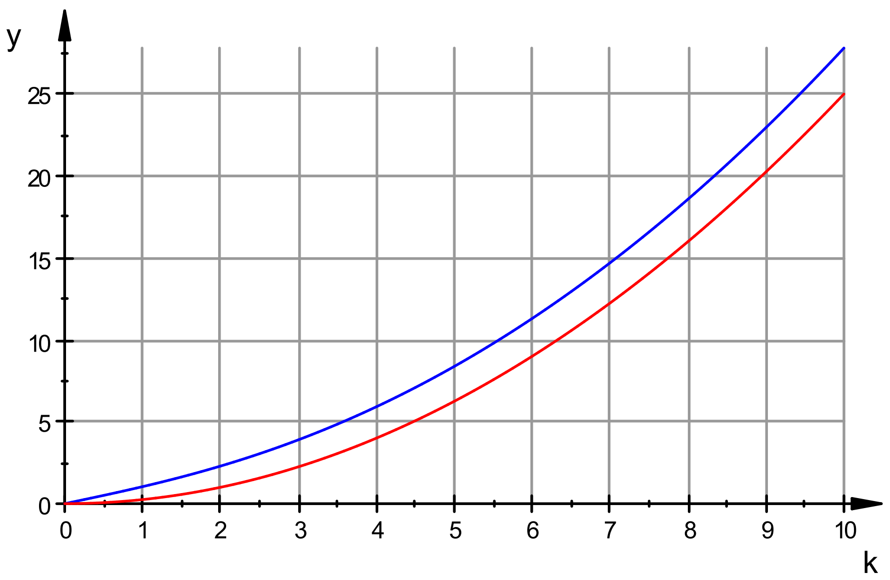
```
bogk:=T*(ln((k + (k^2 + 4)^(1/2))) - ln(2) + 1/4*k*(k^2 + 4)
```

$$T \cdot \left(\ln\left(k + \sqrt{k^2+4}\right) - \ln(2) + \frac{k \cdot \sqrt{k^2+4}}{4}\right)$$

Hier sieht man, dass man mit einer Graphik auskommt

```
bogT:=bogk/T; //Hilfsbogen
bogenk_g:=plot::Function2d(bogk/T,k=0..10):
park_g:=plot::Function2d(k^2/4,k=0..10,LineColor=[1,0,0]):
plot(bogenk_g,park_g, GridVisible=TRUE)
```

$$\ln\left(k + \sqrt{k^2+4}\right) - \ln(2) + \frac{k \cdot \sqrt{k^2+4}}{4}$$



x=k*T ist die Umrechnungsformel.
Zum Beispiel T=5 folgt und X=30 folgt k=6 Die Bogen-Hilfskurve zeigt knapp12
der wahre Bogen ist dann knapp 12*T= 12*5=60
Berechnet:


```
float(bog)|{T=5,X=30}
```

56.5263972

Nützlich ist die Graphik aber vor allem anders herum:
Wenn der Bogen z.B. 50 ist bei T=10, dann ist der Hilfsbogen 50/T=50/10=5.
Dann geht man bei 5 auf der Hochachse zur blauen Kurven und liest k=3,5 ab.
Dann X= T*k=10*3.5=35 und y= x^2/(4*T)=30,6

```
float(f(35)|T=10)
```

30.625

Probe

```
float(bog)|{T=10,X=35}
```

48.53135532

Für genauere Werte muss man sie Graphik feiner ablesen
oder numerische Verfahren verwenden. Die Formel für den Bogen kann man nicht nach k auflösen.