Analysis Krümmung Kurvenheft -9-

Prof. Dr.Dörte Haftendorn www.mathematik-verstehen.de 21. Juni 1997/ Jan 04

f sei eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann gilt für die

Krümmung $\kappa(x) = \dfrac{f''(x)}{\sqrt{\left(1+f'(x)^2\right)^3}}$ und den Krümmungsradius $r(x) = \dfrac{1}{\kappa(x)}$

Im Nebenscheitel der Ellipse (hier BS) ist $x = 0$ und $f'(0) = 0$.

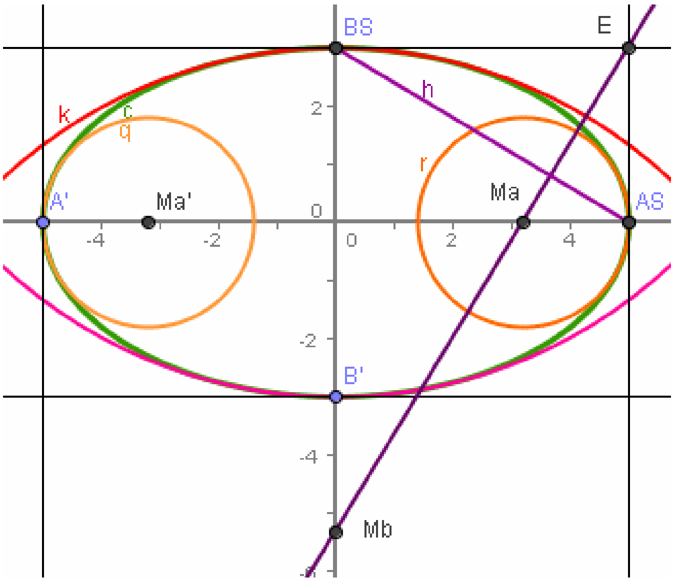
Daher gilt dort $\kappa(0) = f''(0)$ und $r(0) = \dfrac{1}{f''(0)}$.

Implizite Ableitungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} y' = 0$$

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2y'}{b^2} y' + \frac{2y}{b^2} y'' = 0$$



Nun ist im Nebenscheitel y' =0.

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2b}{b^2} y'' = 0$$

Daher gilt:

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b} y'' = 0$$

$$y'' = \frac{-b}{a^2}$$

$$r = \frac{-a^2}{b}$$

Aus Symmetriegründen gilt für den Radius des Hauptscheitel-Krümmungskreises $R = \dfrac{b^2}{a}$

Man kann die Mittelpunkte der Krümmungskreise auf die gezeichnete Art auch geometrisch finden.
Man verbinde dazu die Punkte (0/b) und (a/0) und fälle auf diese Strecke von E= (a/b) das Lot.
Es schneidet die x- und die y-Achse in den gesuchten Punkten.
Weisen Sie nach, dass diese Konstruktion richtig ist.

Beweis: g =MbE hat die Steigung $m = \dfrac{a}{b}$, also gilt $\dfrac{b}{R} = \dfrac{a}{b}$, es folgt $R = \dfrac{b^2}{a}$. Weiter gilt

$\dfrac{r}{a} = \dfrac{a}{b}$, und damit $r = \dfrac{a^2}{b}$, r als Strecke Mb BS.