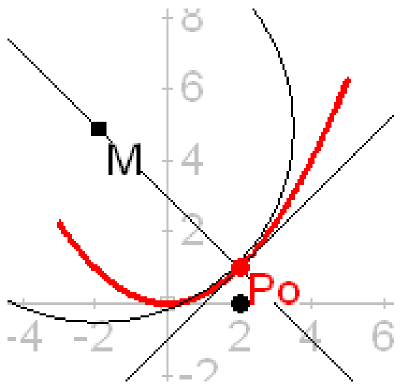
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Uni Lüneburg, 16. Januar 2004



Annäherung an den Begriff “Krümmung”:
Eine Gerade hat sicher der Krümmung Null.
Ein Kreis hat konstante Krümmung und konstanten Radius. Wenn der Radius größer wird, wird die Krümmung kleiner. Daher ist die Definition $\kappa = \frac{1}{r}$ passend.

Bei einer Kurve f mit y=f(x) ändert sich die Krümmung i.a. von Punkt zu Punkt. Die Krümmung müsste mit Hilfe eines Kreises definiert werden, der “am besten passt”. Der müsste Krümmungskreis in P_o heißen, KK(P_o).

Was muss gelten:
1.) KK(P_o) enthält P_o. 2.) Der Mittelpunkt (m,n) liegt auf der Normalen von f in P_o .
3.) KK(P_o) hat in P_o die gleiche Steigung wie f.
4.) KK(P_o) hat in P_o die gleiche 2. Ableitung wie f. (Idee wie bei Taylorreihen)

Die nötigen Gleichungen sind: Kreis $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$, Kurve $y = f(x)$

Tangente $y - y_0 = y_0{}'(x - x_0)$ Normale $y - y_0 = -\frac{1}{y_0{}'}(x - x_0)$

1. Ableitung des Kreises $2(x-m) + 2(y-n)\,y' = 0 \Leftrightarrow (x-m) + (y-n)\,y' = 0$

2. Ableitung des Kreises $1 + y'\cdot y' + (y-n)\,y'' = 0$

Dabei ist $y_0 = f(x_0),\ y_0{}' = f'(x_0),$ u.s.w. Die Bedingungen lauten dann:

1.) $(x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 = r^2$ 2.) $n - y_0 = -\frac{1}{y_0{}'}(m - x_0)$

3.) $(x_0 - m) + (y_0 - n)\,y'_0 = 0$ 4.) $1 + (y_0{}')^2 + (y_0 - n)\,y_0'' = 0$

Übrigens: $3.) \Leftrightarrow 2.)$ 2.) in 1.) $\left((y_0{}')^2 + 1\right)(y_0 - n)^2 = r^2$, hier hinein also 4.) eingesetzt ergibt

$$r^2 = \frac{\left(1 + (y_0{}')^2\right)^3}{\left(y_0''\right)^2}, \text{ also } r = \frac{\left(\sqrt{1 + (y_0{}')^2}\right)^3}{y_0''}, \text{ also } \boxed{\kappa = \frac{1}{r} = \frac{y_0''}{\left(\sqrt{1+(y_0{}')^2}\right)^3}}$$

Schmiegkreis-Mittelpunkt $m = x_0 - \frac{y_0{}'\left(1 + (y_0{}')^2\right)}{\left(y_0''\right)^{\cancel{2}}}$ $n = y_0 + \frac{1 + (y_0{}')^2}{\left(y_0''\right)^{\cancel{2}}}$