Hyperbel als Hüllkurve

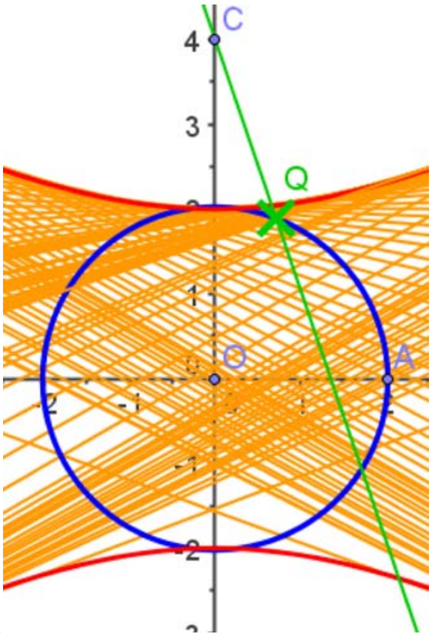
Mathematik in wxMaxima www.mathematik-verstehen.de Haftendorn Dez 2010

Reidt-Wolf 4 S. 82

(%i2) load(draw)$

Konstruktionsbeschreibung:
A sei ein fester Punkt (R,0) auf der x-Achse.
C sei ein fester Punkt (0,c) auf der y-Achse.
Q wandert auf dem Kreis um O durch A.
Welche Hüllkurve hat die Normalenschar auf CQ in Q?

Figure 1:



(%i77) kill(R,u);

(%o77) *done*

(%i78) v:sqrt(R^2-u^2);

(%o78) $\sqrt{R^2-u^2}$

(%i79) g(x,u):=u/(c-v)*(x-u)+v;

(%o79) $g(x,u):=\frac{u}{c-v}(x-u)+v$

(%i80) diff(g(x,u),u,1);

(%o80) $\frac{x-u}{4-\sqrt{R^2-u^2}}-\frac{u}{4-\sqrt{R^2-u^2}}-\frac{u^2\,(x-u)}{\sqrt{R^2-u^2}\left(4-\sqrt{R^2-u^2}\right)^2}-\frac{u}{\sqrt{R^2-u^2}}$

(%i81) xx:solve(diff(g(x,u),u,1)=0,x)[1];

(%o81) $x=-\frac{u\,R^2-16\,u}{4\sqrt{R^2-u^2}-R^2}$

(%i82) fx(u):=rhs(xx);fx(u);

(%o82) fx(u):=rhs(xx)

(%o83) $-\frac{u\,R^2-16\,u}{4\,\sqrt{R^2-u^2}-R^2}$

(%i84) g(fx(u),u);

(%o84) $\frac{u\left(-\frac{u\,R^2-16\,u}{4\,\sqrt{R^2-u^2}-R^2}-u\right)}{4-\sqrt{R^2-u^2}}+\sqrt{R^2-u^2}$

(%i85) fy(u):=facsum(g(fx(u),u));fy(u);

(%o85) fy(u):=facsum(g(fx(u),u))

(%o86) $-\frac{R^2\left(8\,\sqrt{R^2-u^2}-R^2+u^2-16\right)}{R^2\,\sqrt{R^2-u^2}+16\,\sqrt{R^2-u^2}-8\,R^2+4\,u^2}$

Parameterdarstellung

(%i44) fx(u); fy(u);

(%o44) $-\frac{u\,R^2-c^2\,u}{c\,\sqrt{R^2-u^2}-R^2}$

(%o45) $-\frac{R^2\left(2\,c\,\sqrt{R^2-u^2}-R^2+u^2-c^2\right)}{R^2\,\sqrt{R^2-u^2}+c^2\,\sqrt{R^2-u^2}-2\,c\,R^2+c\,u^2}$

(%i88) load(draw)$

(%i89) R:2; c:4;

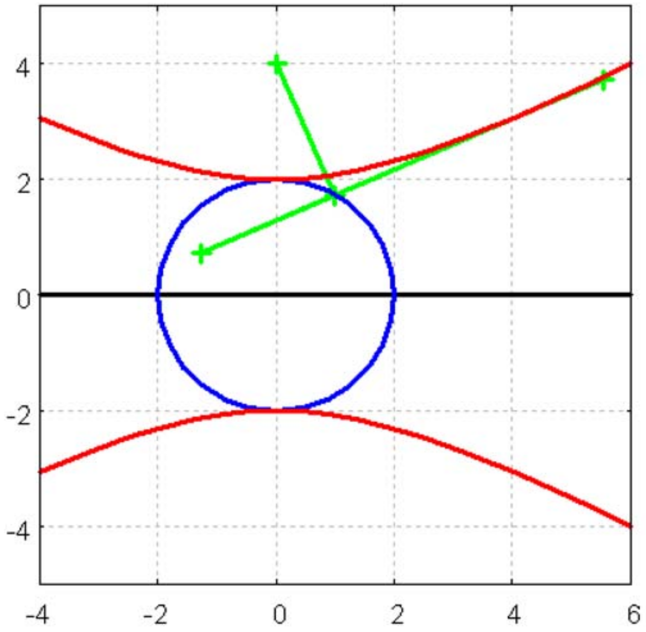
(%o89) 2

(%o90) 4

```
--> ku:gr2d(line_width=3,parametric(x,0,x,-4,6),color=green,points_joined=true,
    points([[0,c],[1,sqrt(R^2-1)],
    [1-c+sqrt(R^2-1), -1+sqrt(R^2-1)],[1+2*c-2*sqrt(R^2-1), 2+sqrt(R^2-1)]
    ]) , grid=true,
    color=blue,parametric(R*cos(t),R*sin(t),t,0,2*%pi),
    color=red,parametric(fx(u),-fy(u),u,-2,2),
    parametric(fx(u),fy(u),u,-2,2),xrange=[-4,6],yrange=[-5,5])$
```

(%i159) draw(ku)$

Figure 2:



Versuch, die Hyperbel zu finden-

(%i160) fxx:eliminate([x=fx(u),y=fy(u)],[u]);

(%o160) $[-R^{8}+\sqrt{R^{2}-u^{2}}\left(\left(y+8\right)R^{6}+\left(-16\,y-8\,x^{2}-256\right)R^{4}+\left(-32\,x^{2}\,y-256\,y+2048\right)R^{2}+4096\,y\right)+\left(-8\,y+x^{2}+16\right)R^{6}+\left(4\,x^{2}\,y+256\,y+256\right)R^{4}+\left(R^{2}-u^{2}\right)\left(16\,x^{2}\,R^{2}+64\,x^{2}\,y\right)+\left(-2048\,y-4096\right)R^{2}]$

Hat nicht funktioniert, u ist noch drin.

Mathematica macht das problemlos.

(%i166) (fxx);

(%o166) $[-R^{8}+\sqrt{R^{2}-u^{2}}\left(\left(y+8\right)R^{6}+\left(-16\,y-8\,x^{2}-256\right)R^{4}+\left(-32\,x^{2}\,y-256\,y+2048\right)R^{2}+4096\,y\right)+\left(-8\,y+x^{2}+16\right)R^{6}+\left(4\,x^{2}\,y+256\,y+256\right)R^{4}+\left(R^{2}-u^{2}\right)\left(16\,x^{2}\,R^{2}+64\,x^{2}\,y\right)+\left(-2048\,y-4096\right)R^{2}]$

Der folgende Weg geht auch nicht, u bleibt auch drin

(%i167) xxu:solve(diff(g(x,u),u,1)=0,u)[1];

(%o167) $u=-\dfrac{4\,x\sqrt{R^{2}-u^{2}}-x\,R^{2}}{R^{2}-16}$

(%i168) ux:solve(xx,u);

(%o168) $[u=-\dfrac{4\,x\sqrt{R^{2}-u^{2}}-x\,R^{2}}{R^{2}-16}]$

Achtung auch nicht ordentlich aufgelöst!!!