Evolute der Parabel
=Kurve der Mittelpunkte der Krümmungskreise

Prof. Dr. Dörte Haftendorn: Mathematik mit MuPAD 4.0, Juni 06 Update 13.06.07
http://haftendorn.uni-lueneburg.de www.mathematik-verstehen.de
##

```
f:=x->a*x^2; f(x),f'(x),f''(x)
```

$$x \to a \cdot x^2$$

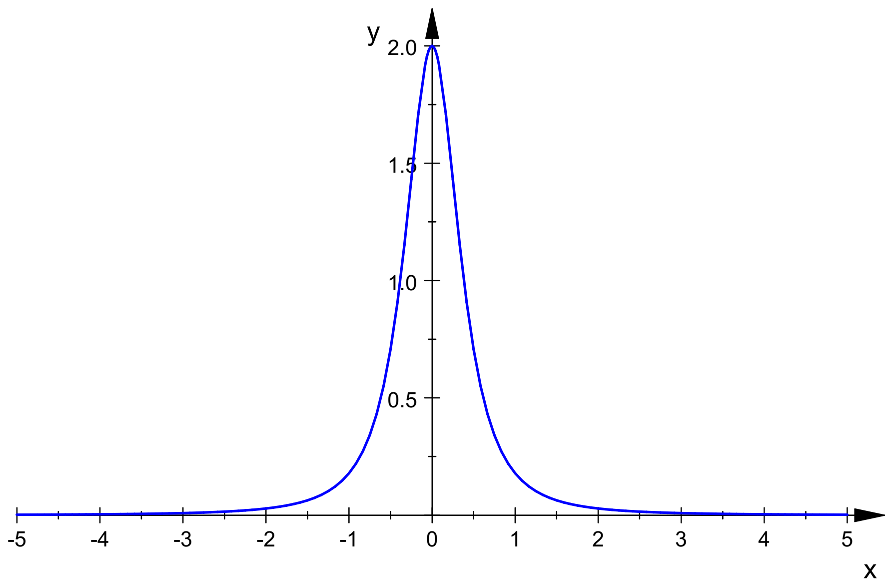
$$a \cdot x^2, 2 \cdot a \cdot x, 2 \cdot a$$

Krummung an der Stelle x

```
kappa:=x-->f''(x)/sqrt(1+f'(x)^2)^3
```

$$x \to \frac{2 \cdot a}{\left(4 \cdot a^2 \cdot x^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

```
plotfunc2d(kappa(x)|a=1)
```

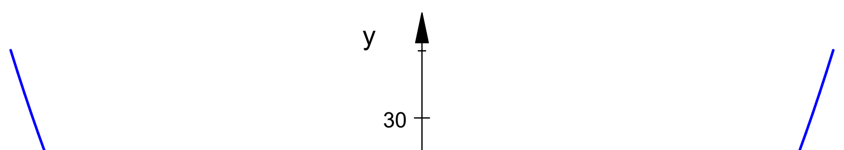


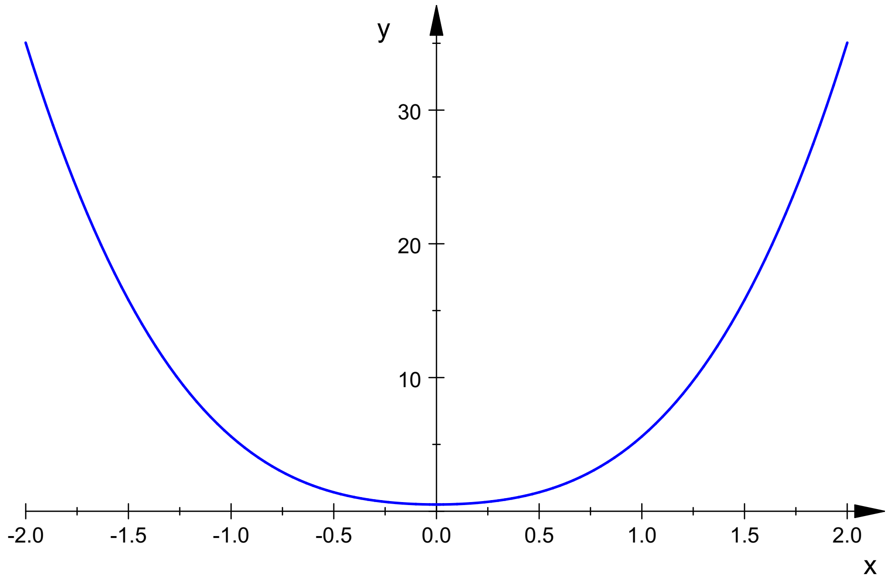
Radien der Krümmungkreise

```
r:=x-->1/kappa(x)
```

$$x \to \frac{\left(4 \cdot a^2 \cdot x^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot a}$$

```
plotfunc2d(r(x)|a=1,x=-2..2)
```



Mittelpunkte der Krümmungskreise M=(m,n), Parameter t=x0

```
m:=t-->t-f'(t)/f''(t)*(1+f'(t)^2);
n:=t-->f(t)+1/f''(t)*(1+f'(t)^2)
```

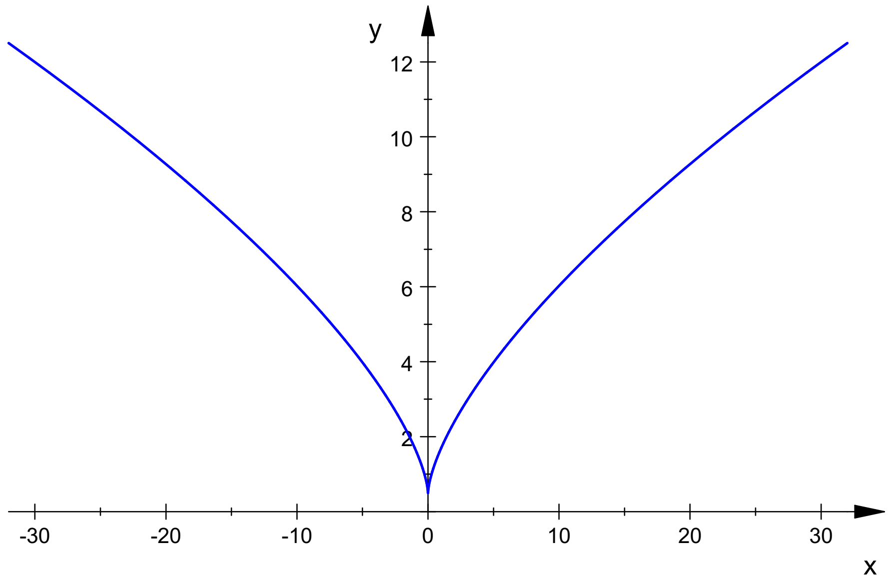
$$t \rightarrow t - t \cdot \left(4 \cdot a^2 \cdot t^2 + 1\right)$$

$$t \rightarrow a \cdot t^2 + \frac{4 \cdot a^2 \cdot t^2 + 1}{2 \cdot a}$$

Das ist schon die Parameterdarstellung der Evolute= Kurve der M

```
evo:=plot::Curve2d([m(t),n(t)]|a=1,t=-2..2);plot(evo)
```

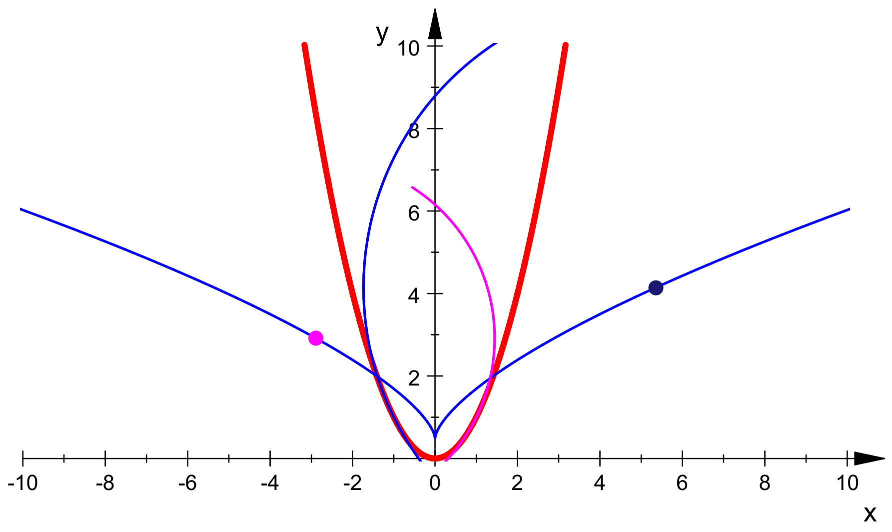
$$\text{plot::Curve2d}\left(\left[t - t \cdot \left(4 \cdot t^2 + 1\right),\ 3 \cdot t^2 + \frac{1}{2}\right],\ t = -2..2\right)$$



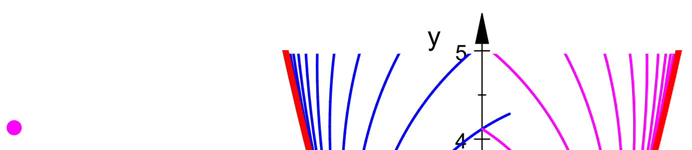
Dazu einzeichnen der Parabel und der halben Krümmungskreis mit M

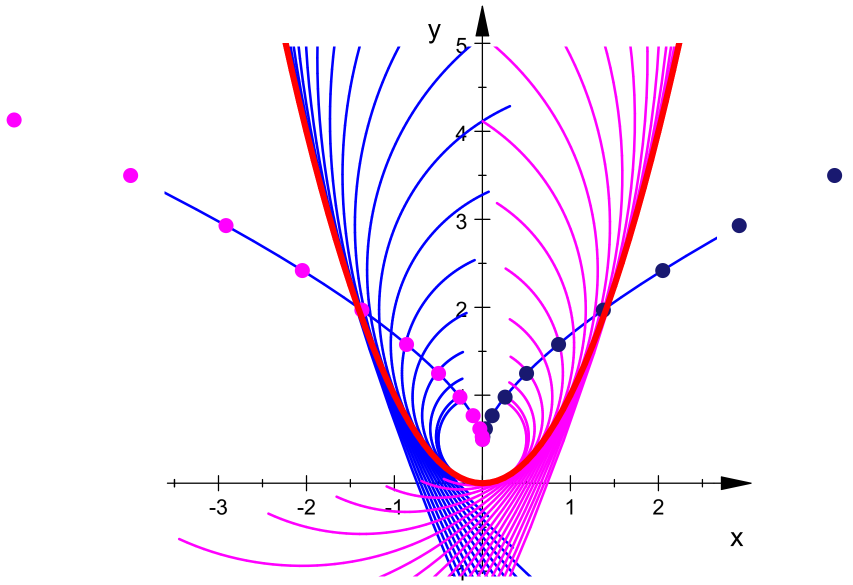
```
a:=1:
par:=plot::Function2d(x^2,x=-5..5,
       ViewingBoxYRange=0..10,

LineColor=[1,0,0],LineWidth=0.8):
```

```
LineColor=[1,0,0],LineWidth=0.8):
kkel:=plot::Arc2d(r(t),[m(t),n(t)],2..4,t=-2..0):
kker:=plot::Arc2d(r(t),[m(t),n(t)],-2..1,t=0..2,
LineColor=[1,0,1]):
Ml:=plot::Point2d([m(t),n(t)],t=-2..0, PointSize=2):
Mr:=plot::Point2d([m(t),n(t)],t=0..2, PointSize=2,
PointColor=[1,0,1]):
plot(par,evo,kkel,kker,Ml,Mr,ViewingBox=[-10..10,0..10])
;
```




```
a:=1:
par:=plot::Function2d(x^2,x=-5..5,
       ViewingBoxYRange=0..10,
LineColor=[1,0,0],LineWidth=0.8):
kkelv:=plot::Arc2d(r(t/10),[m(t/10),n(t/10)],2..4)$
t=-20..0:
kkerv:=plot::Arc2d(r(t/10),[m(t/10),n(t/10)],-2..1,
LineColor=[1,0,1])$ t=0..20:
Mlv:=plot::Point2d([m(t/10),n(t/10)], PointSize=2)$
t=-20..0:
Mrv:=plot::Point2d([m(t/10),n(t/10)], PointSize=2,
PointColor=[1,0,1]) $ t=0..20:
plot(par,evo,kkelv,kkerv,Mlv,Mrv,par,ViewingBox=[-10..10
,0..10]);
```

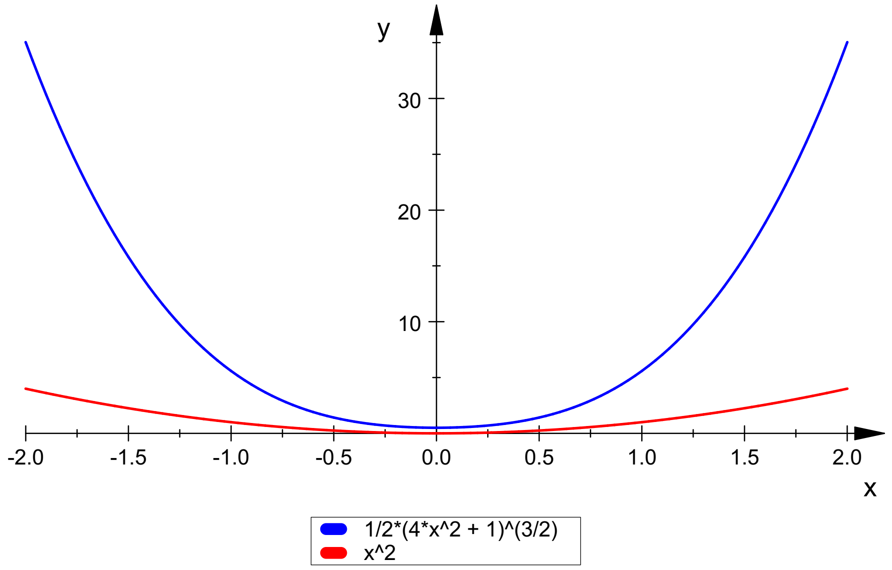


animieren durch Anklicken!

Die Krümmungskreise durchsetzen die Parabel am Berührpunkt.
Nur der SCheitelkeis in ganz im Innern der Parabel.
Zur Begründung wird die Krümmung als Funktion von x betrachtet:

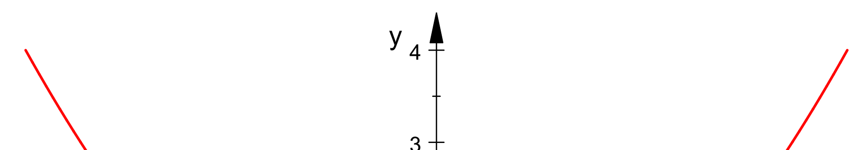
Parabel und Krümmungsradius

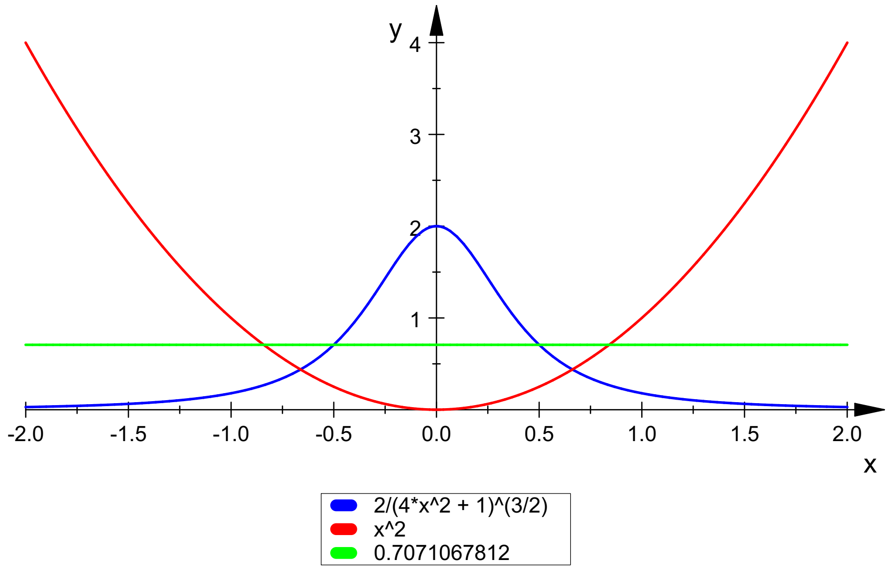
```
plotfunc2d(r(x),f(x)  ,x=-2..2)
```



Parabel und Krümmung

```
plotfunc2d(kappa(x),f(x), kappa(0.5),x=-2..2);
kappa(0.5);
```



0.7071067812

Der Krümmungskreis des Scheitels liegt ganz in der Parabel. Alle anderen Krümmungskreise durchsetzen die Parabel in Ihrem Berührpunkt. Denn z.B. ist für die Berührstelle x=0.5 die Krümmung des Kreises konstant 0.707..., während sie für die Parabel davor größer, danach kleiner ist, d.h. davor ist die Parabel innen, danach ist sie außen.