Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Dezember 02

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a) \quad mit \quad F'(x) = f(x)$$

Faktorregel außen $\int_a^b k \bullet f(x)\,dx = k \bullet \int_a^b f(x)\,dx$, **man kann eine Konstante vorziehen.**

Faktorregel innen $\int_a^b f(k \bullet x)\,dx = \frac{1}{k} \bullet \; F(k \bullet x) \;\; mit \;\; F'(x) = f(x)$,

Kehrwert von k kommt nach vorne, in der Stammfunktion innen bleibt k bei x ,

Summenregel $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ **Summen kann man einzeln integrieren.**

Verschieberegel $\int_a^b f(x-t)\,dx = [F(x-t)]_a^b \;\; mit \;\; F'(x) = f(x)$, **ist f waagerecht verschoben, so auch F.**

Intervall aufteilen $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$, **Grenzen umdrehen** $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Tabelle 1: Grund- oder Stammintegrale $\int f(x)\,dx$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\coth x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcosh} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \qquad (|x| > 1)$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C_1 & |x| < 1 \\ & \text{für} \\ \operatorname{arcoth} x + C_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C_2 & |x| > 1 \end{cases}$$

Typ (A) ist lediglich eine Zusammenfassung der "Faktor innen"-Regel und der Verschieberegel.

Beispiele, $\int \sin(3x-12)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x-12)$, $\int e^{3x-12}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x-12}$

Typ (B) und (C) sind Spezialfälle des umfassenderen Typs:

$f\,'$ erscheint:	$\int g(f(x))\cdot f\,'(x)\,dx = G(f(x))$ mit $G'(z)=g(z)$

Beispiel $\int \cos(x^5)\cdot 5x^4\,dx = \sin(x^5)$ *denn* $\sin'(z)=\cos(z)$, *es ist* $z=f(x)=x^5$,**Umkehrung der Kettenregel**

Typ (B) $\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x)$ *denn* $z=f(x)=\sin(x)$; $f\,'(x)=\cos(x)$; $g(z)=z$; $G(z)=\frac{1}{2}z^2$

Jedes CAS liefert Ihnen auf "Knopfdruck" sofort alle Integrale, die nach solchen Regeln gelöst werden können. Und noch viel mehr Integrale!!!!!! Eingabe und Ausgabe in MuPAD:

```
• int(sin(3*x-12), x)
```

$$-\frac{\cos(12-3\cdot x)}{3}$$

Tabelle 2: Integralsubstitutionen

Integraltyp	Substitution	Lösung	Beispiele	
(A) $\int f(ax+b)\,dx$	$u=ax+b$ $du=a\,dx$ $dx=\frac{du}{a}$		1. $\int(2x-3)^6\,dx$ 2. $\int\sqrt{4x+5}\,dx$ 3. $\int e^{4x+2}\,dx$	$(u=2x-3)$ $(u=4x+5)$ $(u=4x+2)$
(B) $\int f(x)\cdot f'(x)\,dx$	$u=f(x)$ $du=f'(x)\,dx$ $dx=\frac{du}{f'(x)}$	$\frac{1}{2}f^2(x)+C$	1. $\int\sin x\cdot\cos x\,dx$ 2. $\int\frac{\ln x}{x}\,dx$	$(u=\sin x)$ $(u=\ln x)$
(C) $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$u=f(x)$ $du=f'(x)\,dx$ $dx=\frac{du}{f'(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert+C$	1. $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+1}\,dx$ 2. $\int\frac{e^x}{e^x+5}\,dx$	$(u=x^2-3x+1)$ $(u=e^x+5)$
(D) $\int f(x;\sqrt{a^2-x^2})\,dx$	$x=a\cdot\sin u$ $dx=a\cdot\cos u\,du$ $\sqrt{a^2-x^2}=a\cdot\cos u$		1. $\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ 2. $\int x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ 3. $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$	$(x=r\cdot\sin u)$ $(x=r\cdot\sin u)$ $(x=2\cdot\sin u)$
(E) $\int f(x;\sqrt{x^2+a^2})\,dx$	$x=a\cdot\sinh u$ $dx=a\cdot\cosh u\,du$ $\sqrt{x^2+a^2}=a\cdot\cosh u$		1. $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$	$(x=\sinh u)$ $(x=2\cdot\sinh u)$
(F) $\int f(x;\sqrt{x^2-a^2})\,dx$	$x=a\cdot\cosh u$ $dx=a\cdot\sinh u\,du$ $\sqrt{x^2-a^2}=a\cdot\sinh u$		1. $\int\sqrt{x^2-9}\,dx$ 2. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$	$(x=3\cdot\cosh u)$ $(x=5\cdot\cosh u)$

Produktregel der Differentialrechnung $\frac{d}{dx}\left(u(x) \cdot v(x)\right) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Partielle Integration $\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx + c$

Kurzform: $\boxed{\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx}$

als bestimmtes Integral: $\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx = \left[u(x) \cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx$

Typ "Abräumen". Ein Polynom, das als *u(x)* genommen wird, kann man abräumen. *v(x)* muss aber integrierbar sein ohne viel komplizierter zu werden.

Beispiel $\int x^2 \cdot e^{\frac{x}{4}}\,dx = x^2 \cdot 4e^{\frac{x}{4}} - \int 2x \cdot 4e^{\frac{x}{4}}\,dx = x^2 \cdot 4e^{\frac{x}{4}} - \left(2x \cdot 16e^{\frac{x}{4}} - \int 2 \cdot 16e^{\frac{x}{4}}\,dx\right) = 4\left(x^2 - 8x + 32\right)e^{\frac{x}{4}} + c$

Typ "Faktor 1", Erfindung eines Faktors 1, der dann *v'* ist, führt evt. zum Ziel.

Beispiel $\int \ln(x)\,dx = \int \ln(x) \cdot 1\,dx = \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx = \ln(x) \cdot x - x + c$

Typ:"Phönix aus der Asche ", das zu lösende Integral erscheint auch rechts.

Beispiel $\int \cos(x) \cdot e^x\,dx = \cos(x) \cdot e^x - \int (-\sin(x)) \cdot e^x\,dx = \cos(x) \cdot x + \left(\sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x\,dx\right)$

Also $2\int \cos(x) \cdot e^x\,dx = \cos(x) \cdot e^x + \sin(x)e^x$ und damit $\int \cos(x) \cdot e^x\,dx = \frac{1}{2}e^x\left(\cos(x) + \sin(x)\right)$

Typ:"Holzweg", nach zwei oder mehr Schritten hebt sich alles weg, weil man u und v getauscht hat. $\int \cos(x) \cdot e^x\,dx = \cos(x) \cdot e^x - \int (-\sin(x)) \cdot e^x\,dx = \cos(x) \cdot x - \left(e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)\,dx\right)$ also **0=0**

Uneigentliche Integrale

Ist eine Integrationsgrenze unendlich oder Polstelle, so integriert man erst bis zu einer unkritischen Grenze c und betrachtet dann den Grenzwert, wenn c gegen ∞ bzw. die Polstelle rückt.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty}\left(\int_a^c f(x)\,dx\right) = \lim_{c\to\infty}\left(\left[F(x)\right]_a^c\right) = \lim_{c\to\infty}\left(F(c) - F(a)\right)$$

Beispiel $\int_a^\infty e^{-x}dx = \lim_{c\to\infty}\left(\int_a^c e^{-x}dx\right) = \lim_{c\to\infty}\left(\left[-e^{-x}\right]_a^c\right) = \lim_{c\to\infty}\left(-e^c + e^a\right) = e^a$

Nur wenn der Grenzwert existiert, ist das **uneigentliche Integral** sinnvoll.

Zwischenflächen

Für die Fläche im Intervall $[a,b]$ **zwischen** zwei Funktionsgraphen mit $g(x) \le f(x)$ gilt

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

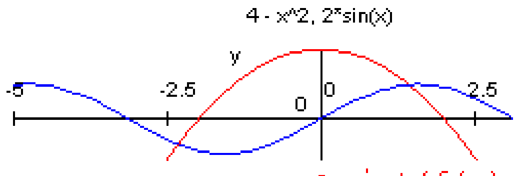
unabhängig von der x-Achse.
Mit MuPAD als Beispiel
X1,x2 sind die Schnittstellen

- `f:=x->(4-x^2);g:=x->2*sin(x)`

$x \to 4 - x^2$

$x \to 2 \cdot \sin(x)$

`plotfunc2d(f(x),g(x))`



- `int(f(x)-g(x), x=x1..x2)`

11.50630988

- `x1:=op(numeric::solve(f(x)-g(x),x=-3..-1))`

−2.333618903

- `x2:=op(numeric::solve(f(x)-g(x),x=1..2.5))`

1.422004944

Es geht um "gebrochen-rationale Funktionen" f mit $\boxed{f(x)=\frac{p_n(x)}{q_m(x)}}$,

d.h. um einen Bruchterm aus Polynomen .

Polynom n-ten Grades $p_n(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0 \; mit\, a_n \neq 0$

Es gibt viele mathematische Zusammenhänge (Integration, Laplace-Transformation u.a.), in denen man einen solchen Funktionsterm nicht gut weiterverwenden kann. Man zerlegt ihn daher in eine Summe aus einen "ganz-rationalen" Anteil und einfachen Teil-Brüchen, man macht eine

"Partialbruchzerlegung": $f^*(x)=\frac{x^4-4x^3-6x^2+4x+5}{x^4-x^3-6x^2}$

Schritt 1: falls der Nennergrad m nicht größer ist als der Zählergrad, $m \le n$

Durch algebraische Division sorgt man dafür, dass der Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad.

$f^*(x)=1-\frac{-3x^3+4x+5}{x^4-x^3-6x^2}$ Im folgenden sei der Zählergrad kleiner als der Nennergrad.

Schritt 2: $f(x)=\frac{Z\ddot{a}hlerpolynom}{Nennerpolynom}=\frac{-3x^3+4x+5}{x^4-x^3-6x^2}$, man bestimmt die Nullstellen des Nenners und zerlegt ihn vollständig in Faktoren der Bauart $(x-x_0)^r$ oder $\left(x^2+px+q\right)^r$

Die Zahl r nennt man "Vielfachheit". Ein quadratischer Term entsteht aus einem Paar konjugiert-komplexer Nullstellen. $x^4-x^3-6x^2=x^2(x+2)(x-3)$

Eine einfache Nullstelle erzeugt einen Summanden der Bauart $\frac{A}{(x-x_0)}$

Eine r-fache Nullstelle erzeugt r Summanden $\frac{B_1}{(x-x_1)}+\frac{B_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{B_r}{(x-x_1)^r}$

Eine einfacher quadratischer Term ohne Nullstelle erzeugt $\frac{Cx+D}{\left(x^2+px+q\right)}$, r>1 entspr.

Schritt 3: Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{Z\ddot{a}hlerpolynom}{Nennerpolynom}=\frac{-3x^3+4x+5}{(x+2)x^2(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\frac{D}{x-3}$$

Schritt 4: Multiplikation mit dem ganzen Nenner ergibt:

$$-3x^3+4x+5=Ax^2(x-3)+B(x+2)x(x-3)+C(x+2)(x-3)+D((x+2)x^2$$

Schritt 5: Nun setz man nacheinander die Nennernullstellen ein. Das liefert sofort einige der gesuchten Kostanten, hier sind das A,C,D. Die fehlenden bestimmt man aus beliebigen Einsetzungen, hier B z.B. mit x=1.

Schritt 6:

Die nun entstandenen Terme kann integrieren oder für die Laplace-Rücktransformation verwenden.

Wieder gibt ein CAS alles sofort auf "Knopfdruck" hier MuPAD

```
partfrac(zz/nn)
```

$$1-\frac{5}{6\cdot x^2}-\frac{21}{20\cdot(x+2)}-\frac{64}{45\cdot(x-3)}-\frac{19}{36\cdot x}$$