Produktregel der Differentialrechnung $\frac{d}{dx}\left(u(x)\bullet v(x)\right) = u'(x)\bullet v(x) + u(x)\bullet v'(x)$

Partielle Integration $\int u(x)\bullet v'(x)\,dx = u(x)\bullet v(x) - \int u'(x)\bullet v(x)\,dx + c$

Kurzform: $\boxed{\int u\bullet v'\,dx = u\bullet v - \int u'\bullet v\,dx}$

als bestimmtes Integral: $\int_a^b u(x)\bullet v'(x)\,dx = \left[u(x)\bullet v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\bullet v(x)\,dx$

Typ "Abräumen". Ein Polynom, das als *u(x)* genommen wird, kann man abräumen.
v(x) muss aber integrierbar sein ohne viel komplizierter zu werden.

Beispiel $\int x^2\bullet e^{\frac{x}{4}}\,dx = x^2\bullet 4e^{\frac{x}{4}} - \int 2x\bullet 4e^{\frac{x}{4}}dx = x^2\bullet 4e^{\frac{x}{4}} - \left(2x\bullet 16e^{\frac{x}{4}} - \int 2\bullet 16e^{\frac{x}{4}}dx\right) = 4\left(x^2 - 8x + 32\right)e^{\frac{x}{4}} + c$

Typ "Faktor 1", Erfindung eines Faktors 1, der dann *v'* ist, führt evt. zum Ziel.

Beispiel $\int \ln(x)\,dx = \int \ln(x)\bullet 1\,dx = \ln(x)\bullet x - \int \frac{1}{x}\bullet x\,dx = \ln(x)\bullet x - x + c$

Typ:"Phönix aus der Asche ", das zu lösende Integral erscheint auch rechts.

Beispiel $\int \cos(x)\bullet e^x\,dx = \cos(x)\bullet e^x - \int(-\sin(x))\bullet e^x\,dx = \cos(x)\bullet x + \left(\sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x\,dx\right)$

Also $2\int \cos(x)\bullet e^x\,dx = \cos(x)\bullet e^x + \sin(x)e^x$ und damit $\int \cos(x)\bullet e^x\,dx = \frac{1}{2}e^x\left(\cos(x)+\sin(x)\right)$

Typ:"Holzweg", nach zwei oder mehr Schritten hebt sich alles weg, weil man u und v getauscht hat. $\int \cos(x)\bullet e^x\,dx = \cos(x)\bullet e^x - \int(-\sin(x))\bullet e^x\,dx = \cos(x)\bullet x - \left(e^x\cos(x) - \int e^x\cos(x)\,dx\right)$ also **0=0**

Uneigentliche Integrale

Ist eine Integrationsgrenze unendlich oder Polstelle, so integriert man erst bis zu einer unkritischen Grenze c und betrachtet dann den Grenzwert, wenn c gegen ∞ bzw. die Polstelle rückt.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty}\left(\int_a^c f(x)\,dx\right) = \lim_{c\to\infty}\left(\left[F(x)\right]_a^c\right) = \lim_{c\to\infty}\left(F(c)-F(a)\right)$$

Beispiel $\int_a^\infty e^{-x}dx = \lim_{c\to\infty}\left(\int_a^c e^{-x}dx\right) = \lim_{c\to\infty}\left(\left[-e^{-x}\right]_a^c\right) = \lim_{c\to\infty}\left(-e^c + e^a\right) = e^a$

Nur wenn der Grenzwert existiert, ist das **uneigentliche Integral** sinnvoll.

Zwischenflächen

Für die Fläche im Intervall $[a,b]$ **zwischen** zwei Funktionsgraphen mit $g(x)\le f(x)$ gilt

$$A = \int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx$$

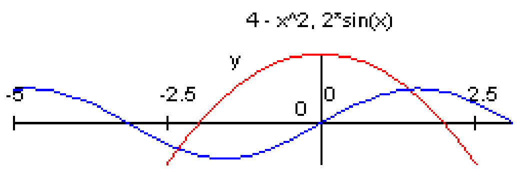
unabhängig von der x-Achse.
Mit MuPAD als Beispiel
X1,x2 sind die Schnittstellen

```
• f:=x->(4-x^2);g:=x->2*sin(x)
```

$x \to 4 - x^2$

$x \to 2\cdot\sin(x)$

```
plotfunc2d(f(x),g(x))
```




```
• x1:=op(numeric::solve(f(x)-g(x),x=-3..-1))
```

-2.333618903

```
• x2:=op(numeric::solve(f(x)-g(x),x=1..2.5))
```

1.422004944

```
• int(f(x)-g(x), x=x1..x2)
```

11.50630988