# Teilbarkeitsaussagen und Vollständige Induktion

Definition: $a,b \in \mathbb{Z}:\quad a \text{ teilt } b \Leftrightarrow a \mid b \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : a \cdot k = b$

Behauptung: $\boxed{\forall n:\quad 3 \mid n^3 - n}$

Beweis: Induktions-**Verankerung** (IV) $\quad n = 1\quad re = 1 - 1 = 0,\quad 3 \cdot 0 = 0, 3 \mid 0\quad o.k.$

Induktions-**Annahme**:(IA) bis $n$ gilt $:\quad 3 \mid n^3 - n,$ also $\exists \mathrm{k} \in \mathbb{Z}:\ 3 \cdot \mathrm{k} = n^3 - n$

Induktions –**Ziel**:

für $n+1$ gilt $:\quad 3 \mid (n+1)^3 - (n+1),$ also $\exists r \in \mathbb{Z}:\ 3 \cdot r = (n+1)^3 - (n+1)$

Induktions-**Schritt** $n \to n+1$

$$\text{rechte Seite} = (n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$$

$$= n^3 - n + 3(n^2 + n) \underset{IA}{=} 3 \cdot k + 3(n^2 + n) = 3 \cdot \left( \underbrace{k + n^2 + n}_{\in \mathbb{Z}} \right)$$

Die Klammer ist also das *r* aus dem Ziel. quod erat demonstrandum q.e.d.

## Aufgaben

Von den folgenden Aussagen sind einige richtig und einige falsch. Bei den richtigen wird Ihnen die Vollständige Induktion gelingen, bei den falschen klappt entweder die Verankerung nicht, während der Induktionsschritt gelingt, oder die Verankerung gelingt, aber der Induktionsschritt gelingt nicht.

**Zum Abgeben: jeder Typ einmal und der Beweis der allgemeinen Aussage.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **A** $2 \mid n^2 + n$ | **B** $2 \mid 3^n + 4$ | **C** $6 \mid 7^n - 1$ | **D** $(a-1) \mid \left(a^n - 1\right)$ | **E** $11 \mid 12^n - 1$ |
| **F** $6 \mid n^3 + 5n$ | **G** $3 \mid 4 \cdot n^3 - n$ | **H** $6 \mid n^3 - 7n$ | **J** $5 \mid n^3 - 2n + 6$ | **K** $10^n \underset{18}{\equiv} 4$ |

**L**
**Was gilt anstelle von K wirklich?**