

Russischer Zahlmeister

Probiere, welche Summen
er auszahlen kann
Ab welchem Betrag kann er
alles auszahlen?

Suche Vielfache mit Unterschied 1
 Rubelnoten, die er hat. $3 \cdot 5 = 15$ $2 \cdot 8 = 16$
 $3 \cdot 8 = 24$ $5 \cdot 5 = 25$

Kilogramm
09
und Schweizer 38

gar nicht Tausdem kann man, wenn man
weder 3 5 noch 3 8 hat

also $2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 = 26$

also kommt man nicht
auf 27

$28 = 4 \cdot 5 + 1 \cdot 8$

Induktionsanfang, Verankerung.

n sei ausbezahlt

Nimm das mit 3 5 gestrichen ist,

nehme man nun 2 8 dafür \Rightarrow

Wenn das mit 3 8

nehme man nun 5 5 \Rightarrow

$\left. \begin{matrix} n+1 \\ \text{ist} \\ \text{ausbezahlt.} \end{matrix} \right\}$

8 13

$3 \cdot 13 = 39$ $5 \cdot 8 = 40$

$8 \cdot 8 = 64$ $5 \cdot 13 = 65$

nicht tauschbar $2 \cdot 13 + 7 \cdot 8 = 26 + 56 = 82$

also 83 nicht auszahlbar

ab 84 ist alles auszahlbar.

$84 = 4 \cdot 8 + 4 \cdot 13$

Ind. Anfang

Verankerung.

Vielfachennummern darstellen.

$1 = 5 \cdot 18 - 8 \cdot 8$

$1 = 5 \cdot 13 - 8 \cdot 13 + 8 \cdot 13 - 8 \cdot 8$

$1 = -3 \cdot 13 + 5 \cdot 8$

die andere VSD

Russischer Zahlmeister, allgemein

Münzen a b $1 = ra + sb$

$$\text{ggT}(a,b)=1 \quad \exists \quad v \leq 0 \quad \text{oder} \quad s \leq 0$$

Beh: $\varphi = (a-1)(b-1)$ ist auszahlbar

$$n > \varphi$$

" "

$$\varphi - 2$$

" "

aber lässt den Induktionsschritt nicht zu

Beweis $\varphi = (a-1)(b-1)$

$$= ab - a - b + 1 = ab - a - b + ra + sb$$

$$= \underbrace{(r-1)a}_{>0} + \underbrace{(s-1+a)b}_{>0} = \underbrace{(r-1-b)a}_{>0} + \underbrace{(s-1)b}_{>0}$$

wenn $s < 0$ wenn $r < 0$

$\Rightarrow \varphi$ auszahlbar

$$s < 0 \Rightarrow (-s)b \rightarrow ra$$

der andere Tausch $1 = ra - ab + ab + sb$

$$= \underbrace{(r-b)a}_{<0} + \underbrace{(s+a)b}_{>0}$$

$$(b-r)a \rightarrow (s+a)b$$

Der Induktionsschritt klappt nicht,

wenn beide Tauschvorgänge nicht gehen

$$(-s-1)b + (b-r)a = -sb - ra - b + ab - a$$

$$= -(sb + ra) - a - b + ab = ab - a - b - 1 = \varphi - 2$$

qed.

a	b	φ	$\varphi - 2$
7	9	$6 \cdot 8 = 48$	46

~~47~~

$$1 = ra + sb$$

$$1 = 4 \cdot 9 - 5 \cdot 7$$

$$1 = -3 \cdot 9 + 4 \cdot 7$$

Ke 09