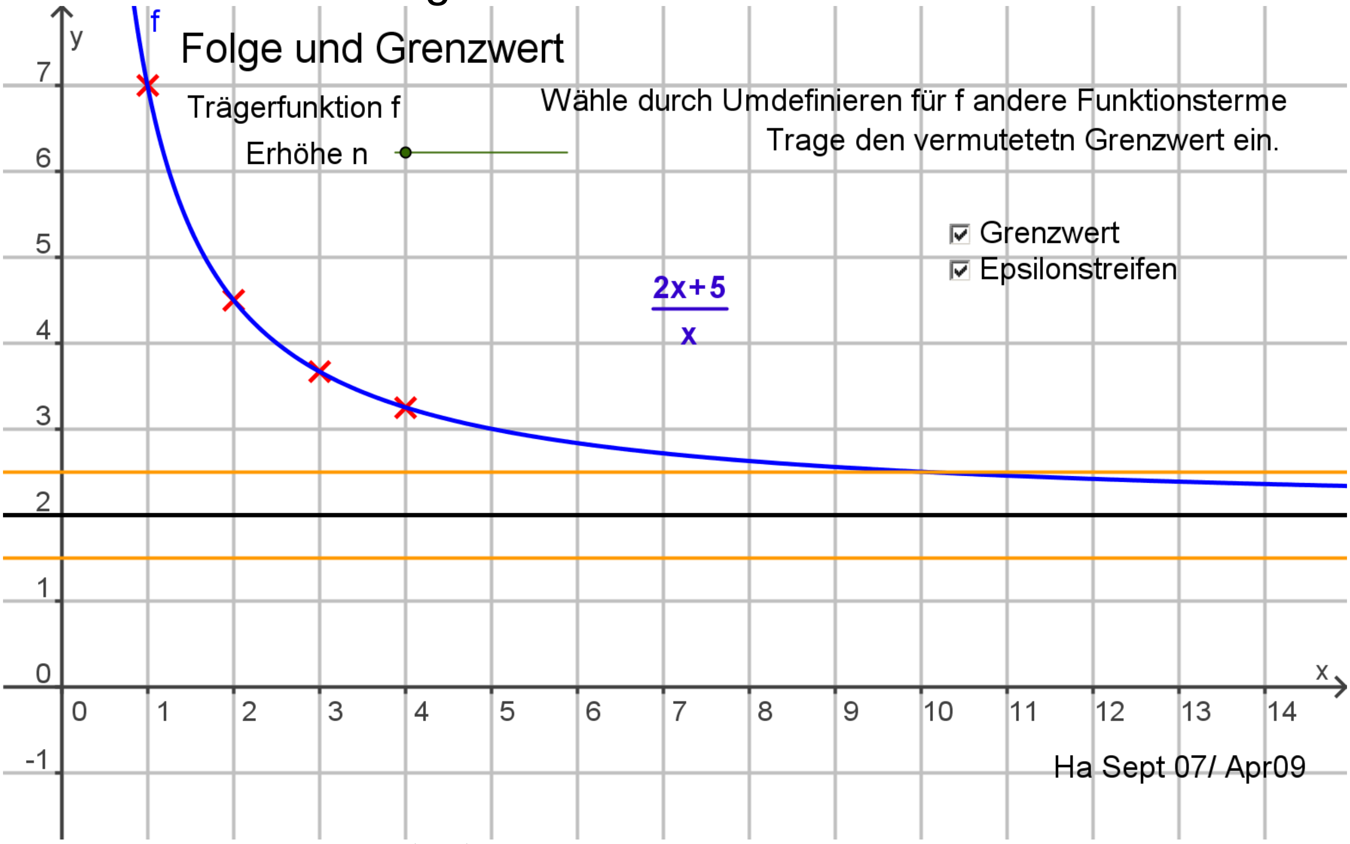
Grenzwert einer Folge



Gegeben ist eine Folge $\langle a_n \rangle$ und eine Zahl g,

im Beispiel $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \dfrac{2n+5}{n} = 2 + \dfrac{5}{n}$ und $g = 2$

Definition: g heißt **Grenzwert der Folge** $\langle a_n \rangle$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N gibt, so dass alle Folgenglieder mit größerem Index von g einen Abstand haben, der kleiner ist als $\varepsilon > 0$.
Formale Schreibweise dieses Textes:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ N : \quad \forall\ \ n \geq N \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon \right)$$

Oben ist N=11, in der zugehörigen GeoGebra-Datei kann man ε variieren.
Zu reellen Folgen lässt sich meist eine reelle **Trägerfunktion** angeben, die denselben Berechnungsterm hat, und zwar statt mit n geschrieben mit x.

Oben ist $a_n = f(n) = \dfrac{2n+5}{n}$ und $f(x) = \dfrac{2x+5}{x}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{n} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x} = 2$$

Man sagt auch: f hat die waagerechte Asymptote $y = 2$.