

Iteration-Rekursion allgemein

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, MuPAD 4, <http://haftendorn.uni-lueneburg.de> Aug.06

Automatische Übersetzung aus MuPAD 3.11, Okt. 05 Update 19.4.07

Web: <http://haftendorn.uni-lueneburg.de> www.mathematik-verstehen.de

+++++

#####

Turm von Hanoi, allgemeine Erläuterung (diese Seite)

Heronverfahren zum Wurzelziehen (diese Seite)

Newtonverfahren (diese Seite)

Logistische Parabel (extra Seite)

#####

Kern der Iteration ist die Anwendung einer Funktion auf ihre eigene Ausgabe, in MuPAD erzeugt durch @@

(f@@n)(start) wendet f auf start an, und dann f auf das Ergebnis, usw. insgesamt n mal.

```
hanoi:=x->(2*x+1): //Trägerfunktion der Iteration
```

```
start:=1:  
werte:=start, (hanoi@@i)(start) $ i=1..4;
```

1, 3, 7, 15, 31

Der Startwert start wird auf 1 gesetzt. Der Doppelpunkt unterdrückt die Ausgabe.

Mit start, wird der Wert dann doch angezeigt und zwar, wegen des Kommas als erster Wert einer Folge.

Der eigentliche Teil der Folge wird dann erzeugt.

\$ heißt Folgenerator, der Laufindex i läuft von 1 bis 4.

Der vor \$ stehende Term wird also mit Werten 1=,i=2,.. ausgewertet.

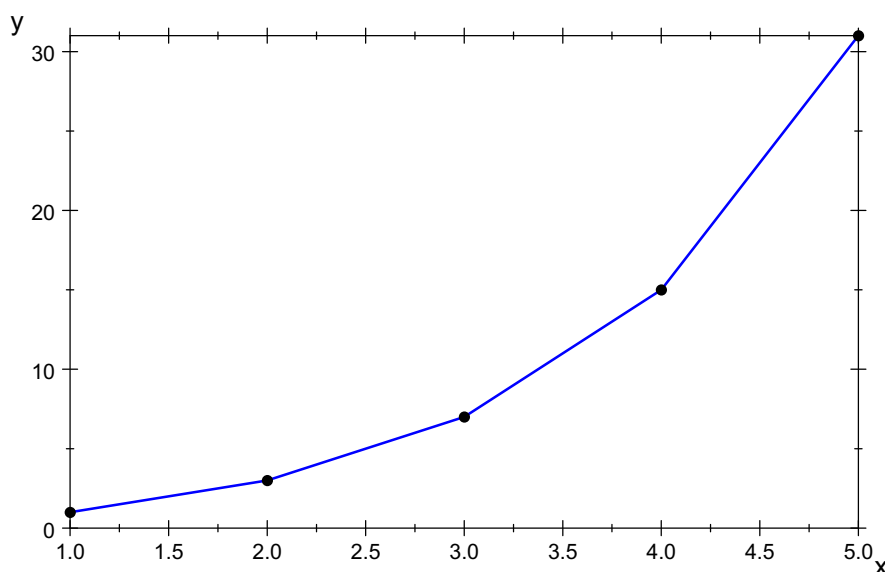
Es entstehen die Werte (hanoi@@1)(x), (hanoi@@2)(x), ...,

das ist ausführlich hanoi(start), hanoi(hanoi(start)), hanoi(hanoi(hanoi(start))),..

// sind Zeilen-Kommentare

Graphen dazu auf zwei Arten: "Zeit-Graphen" und "Spinnweb-Graphen"

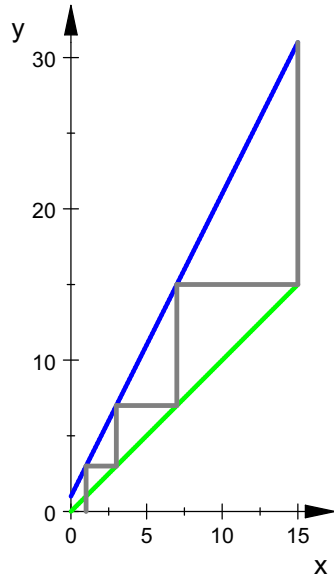
```
grwerte:=plot::Listplot([werte]):  
plot(grwerte);
```



1

```
it:=plot::Iteration(hanoi(x),start, x = 0..15,  
                    LineStyle=Solid, LineWidth=0.65):  
wh:= plot::Function2d(x, x = 0..15,LineWidth=0.6, Color=RGB::Green):  
ghanoi:= plot::Function2d(hanoi(x), x = 0..15, LineWidth=0.6):
```

```
ghanoi:= plot::Function2d(hanoi(x), x = 0..15, LineWidth=0.6):
plot(wh,ghanoi, it)
```



#####

Heronfolge zur Quadrat-Wurzelberechnung

```
heron:=x->((x+a/x)/2): heron(x); //Berechnung von Wurzel(a)
```

$$\frac{x}{2} + \frac{a}{2 \cdot x}$$

```
a:=2: start:=0.1:
werte:=start,float((heron@@i)(start)) $ i=1..6; //Wurzel(2)
```

0.1, 10.05, 5.124502488, 2.757392138, 1.74135758, 1.444943382, 1.41454033

float(wert) gibt wert als Dezimalzahl oder mit Hilfe von Dezimaleahlen aus.

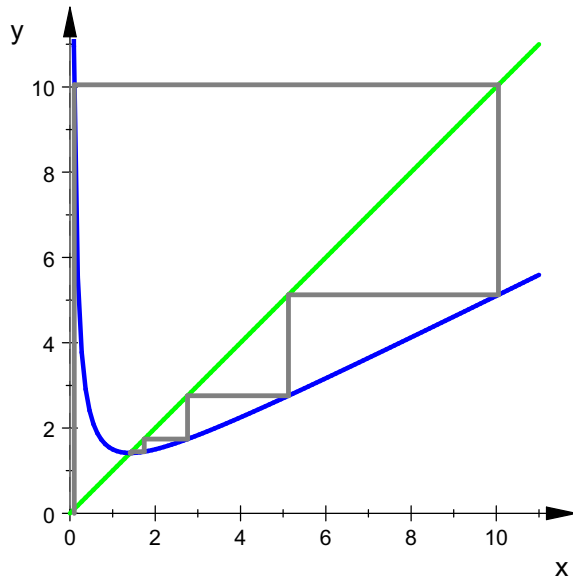
```
a2:=100:start2:=1:start2,float((heron@@i)(start2)) $ i=1..7;
```

1, 1.5, 1.416666667, 1.414215686, 1.414213562, 1.414213562, 1.414213562, 1.414213562

Das Heronverfahren funktioniert sogar, wenn man "blind" startet.

```
it:=plot::Iteration(heron(x),start, x = 0..11,
                    LineStyle=Solid, LineWidth=0.65):
wh:= plot::Function2d(x, x = 0..11,LineWidth=0.6, Color=RGB::Green):
gheron:= plot::Function2d(heron(x), x = 0..11, LineWidth=0.6):
plot(wh,gheron, it)
```





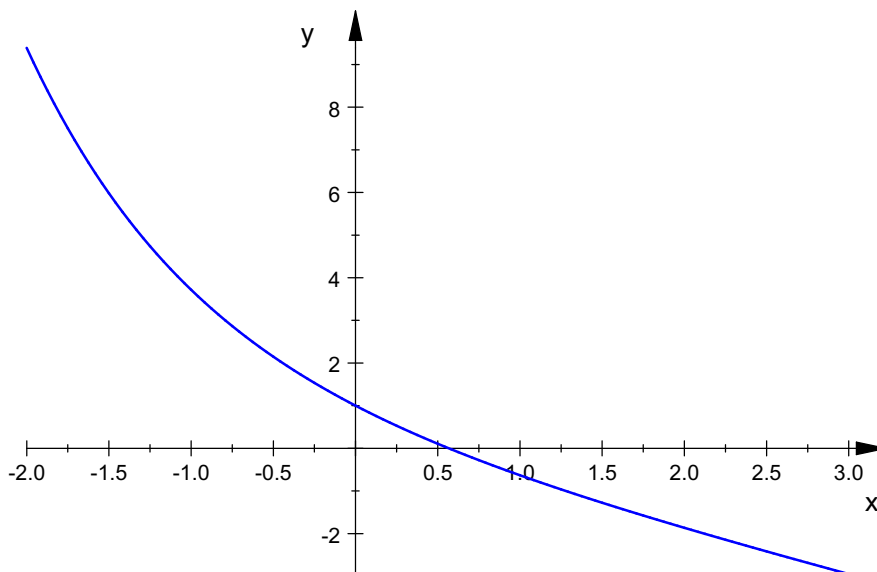
#####

Newtonverfahren zur Nullstellenbestimmung

```
f:=x->(E^(-x)-x): f(x);
```

$$e^{-x} - x$$

```
plotfunc2d(f(x), x=-2..3)
```



```
newt:=x->(x- f(x)/f'(x)); normal(newt(x));
```

$$x \rightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\frac{e^{-x} + x \cdot e^{-x}}{e^{-x} + 1}$$

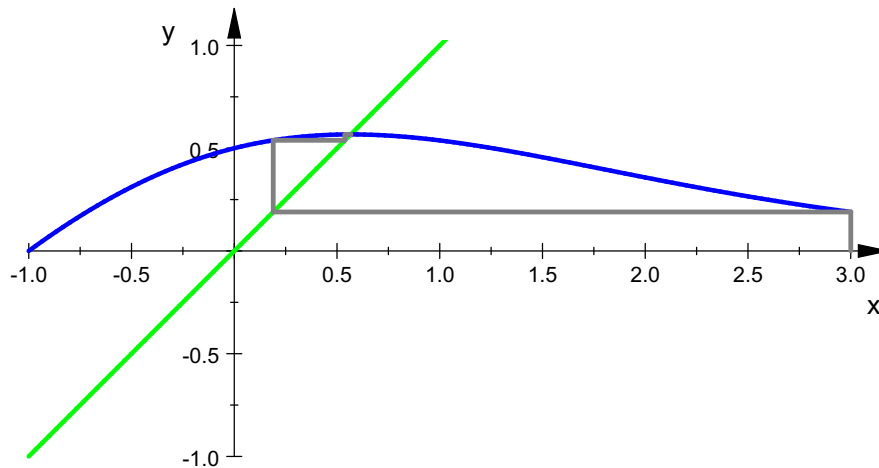
```
start:=3: start, float((newt@@i)(start)) $ i=1..4;
```

```
3, 0.1897034927, 0.5385976217, 0.5669945662, 0.5671432864
```

```
it:=plot::Iteration(newt(x), start, x = -1..3,
```

```
LineStyle=Solid, LineWidth=0.65):
```

```
LineStyle=Solid, LineWidth=0.65):
wh:= plot::Function2d(x, x = -1..3,ViewingBoxYRange=-1..1,
    LineWidth=0.6, Color=RGB::Green):
gnewt:= plot::Function2d(newt(x),x = -1..3, LineWidth=0.6):
plot(wh,gnewt, it)
```



```
delete f,newt:
```

```
newt:=x->x-f(x)/f'(x)
```

$$x \rightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Fixpunkt liegt bei x mit $f(x)=0$, also bei der gesuchten Nullstelle.
Steigung im Fixpunkt x_s :

```
newt'(x)
```

$$\frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2}$$

Ist $f(x_s)=0$ aber nicht auch $f'(x_s)=0$ auch nicht $f'(x_s)=\text{unendlich}$,
dann fällt der mittlere Term weg und der vordere kürzt sich zu 1.
Also ist $\text{newt}'(x_s)=0$.

Also schneidet die Newtonfunktion die Winkelhalbierende (i.a.) waagrecht.
Man sagt: das Newtonverfahren konvergiert "superschnell".

//-----

$$\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Anderenfalls ist der Grenzwert von
mit der Regel von de L'Hospital zu bilden.

$$\lim_{x \rightarrow x_s} \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2} = \lim_{x \rightarrow x_s} \frac{f'(x) f''(x) + f(x) f'''(x)}{2 f'(x) f''(x)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) + \lim_{x \rightarrow x_s} \left(\frac{f(x) f'''(x)}{f'(x) f''(x)}\right)$$

Wenn der letzte Grenzwert nun 0 ist, ist die Steigung im Fixpunkt immerhin $1/2$.
Damit konvergiert das Newtonverfahren wenigstens noch linear.