Extremwertaufgaben (aus TPC 2001 PAETEC) Haftendorn 2011

Jede Aufgabe ist hier ein neues Problem

FA 46/47 Rechteck U min, F max

FA 48 Quader, Oberfläche minimal

FA 49 Baugrundstück (wie "Glasrest")

hierin Erklärung für Maßübertragung, (existiert auch extra)

FA 50 Glasrest mit abgebrochener Ecke

FA 51 Kanal (bzw. Tunnel) ist eine eigene Datei, die steht bei anderen Anufgaben zum Kanal

1.1

FA 46 47 Rechteck, U min, F max

FA 46 Vor einer Werkhalle soll ein rechteckiger Lagerplatz mit einer Fläche von 450 m^2 angelegt werden. Dazu ist der Platz an 3 Seiten zu umzäunen, an der 4. Seite begrenzt ihn die Werkhalle. Die Abmessungen des Lagerplatzes sollen so gewählt werden, dass die Gesamtlänge des Zaunes minimal wird. Berechnen Sie für diesen Fall Länge und Breite des Platzes und die Gesamtlänge des Zaunes!

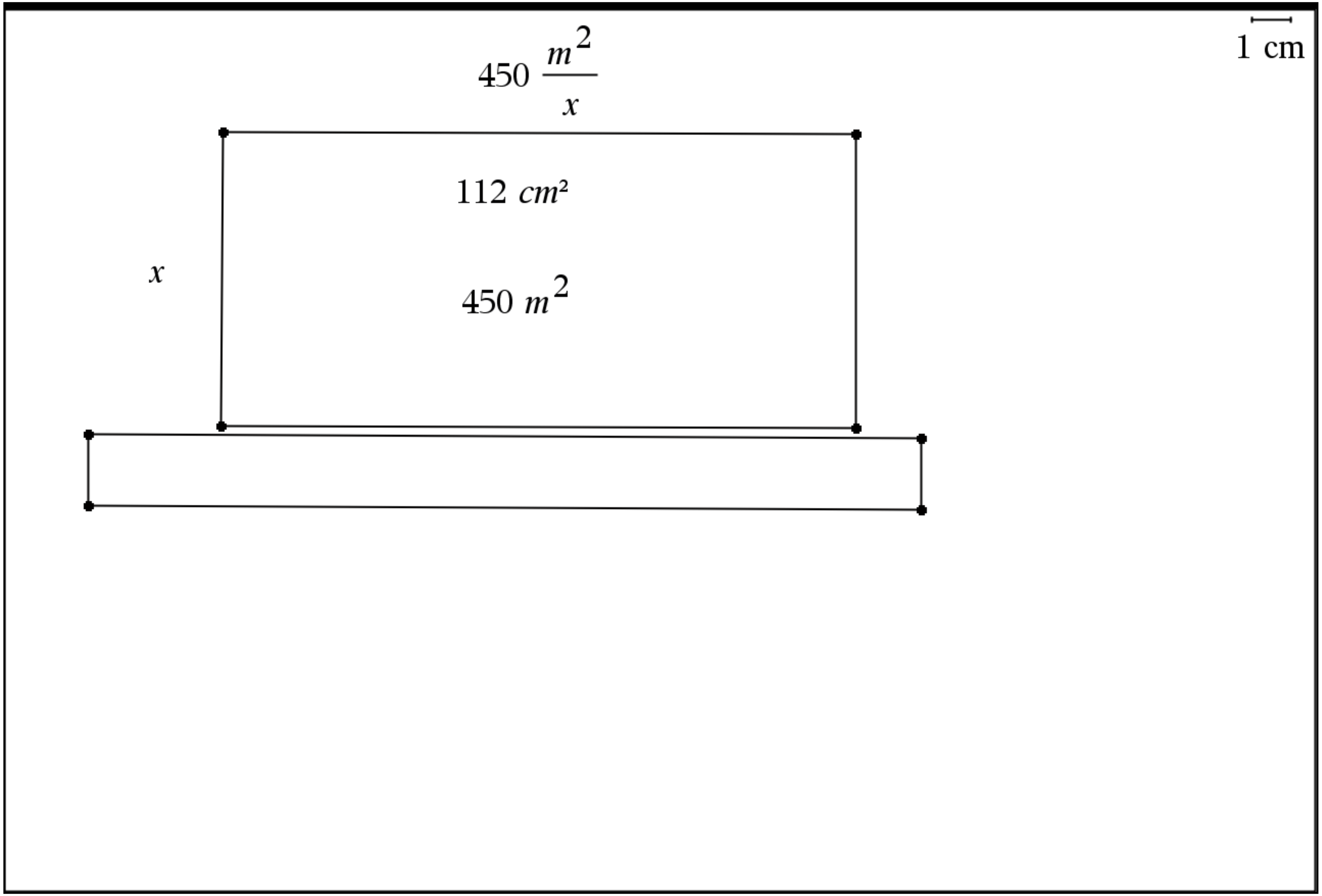
Kanten x und 450/x **umfang**$(x):=2\cdot x+\dfrac{450}{x}$

$\dfrac{d}{dx}(\mathbf{umfang}(x)) \blacktriangleright 2-\dfrac{450}{x^2}$ $\quad \text{solve}\left(2-\dfrac{450}{x^2}=0,x\right) \blacktriangleright x=^-15 \text{ or } x=15$

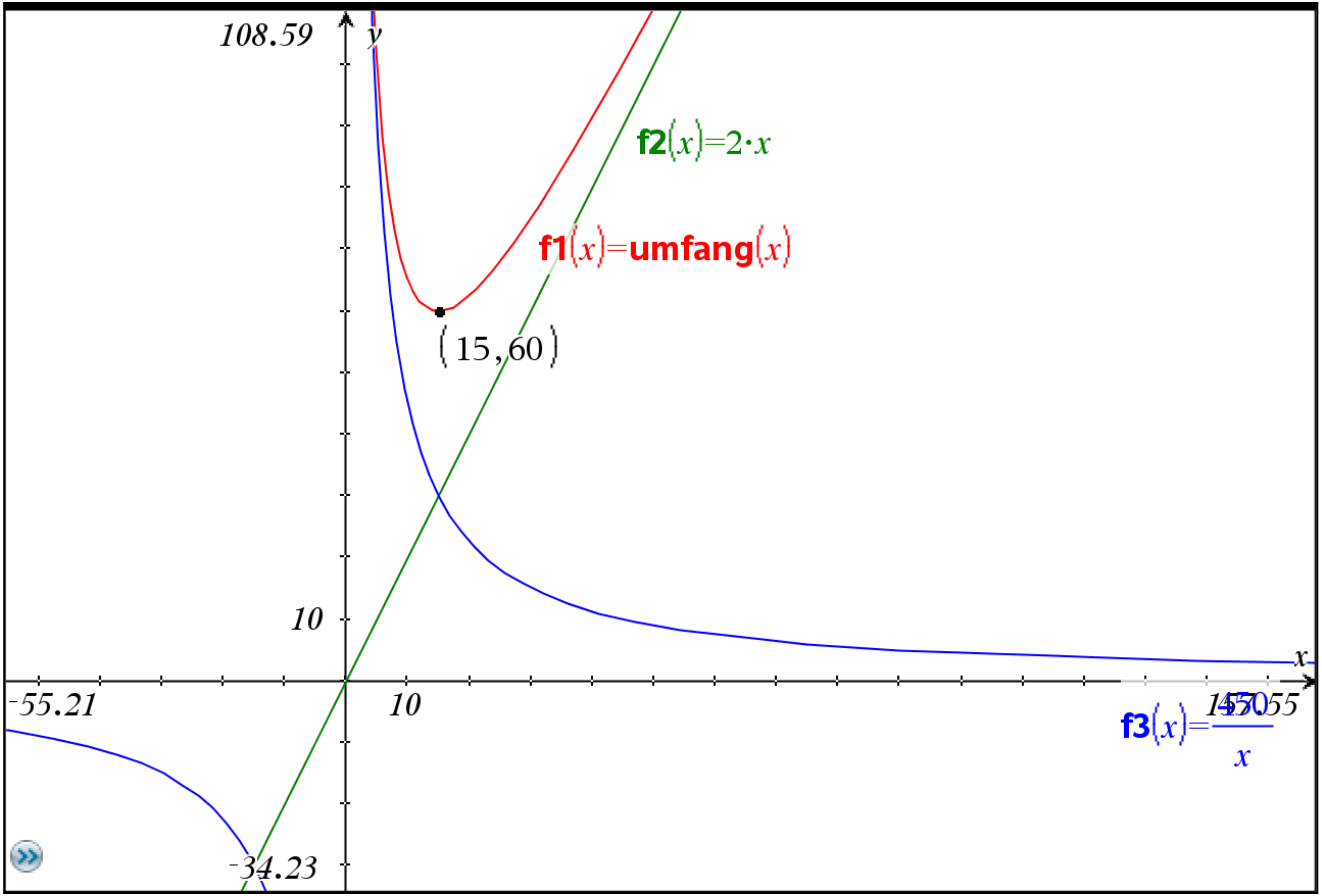
$\mathbf{y}:=\dfrac{450}{15} \blacktriangleright 30$ Also ist jede Seite, die an die Werkhalle grenzt, 15 m lang

und die andere Seite misst 30 m. Die Form ist aus zwei Quadraten der Kantenlänge 15 m aufgebaut.

2.1



2.2



108.59
y
f2(x)=2·x
f1(x)=umfang(x)
(15,60)
10
x
-55.21
10
145.55
f3(x)=450/x
-34.23

2.3

FA 47 Ein Zaun von 40 m Länge soll dazu verwendet werden, eine rechteckige Fläche mit größtmöglichem Inhalt einzuschließen. Man ermittle die Länge a, die Breite b und den maximalen Flächeninhalt dieses Rechtecks.

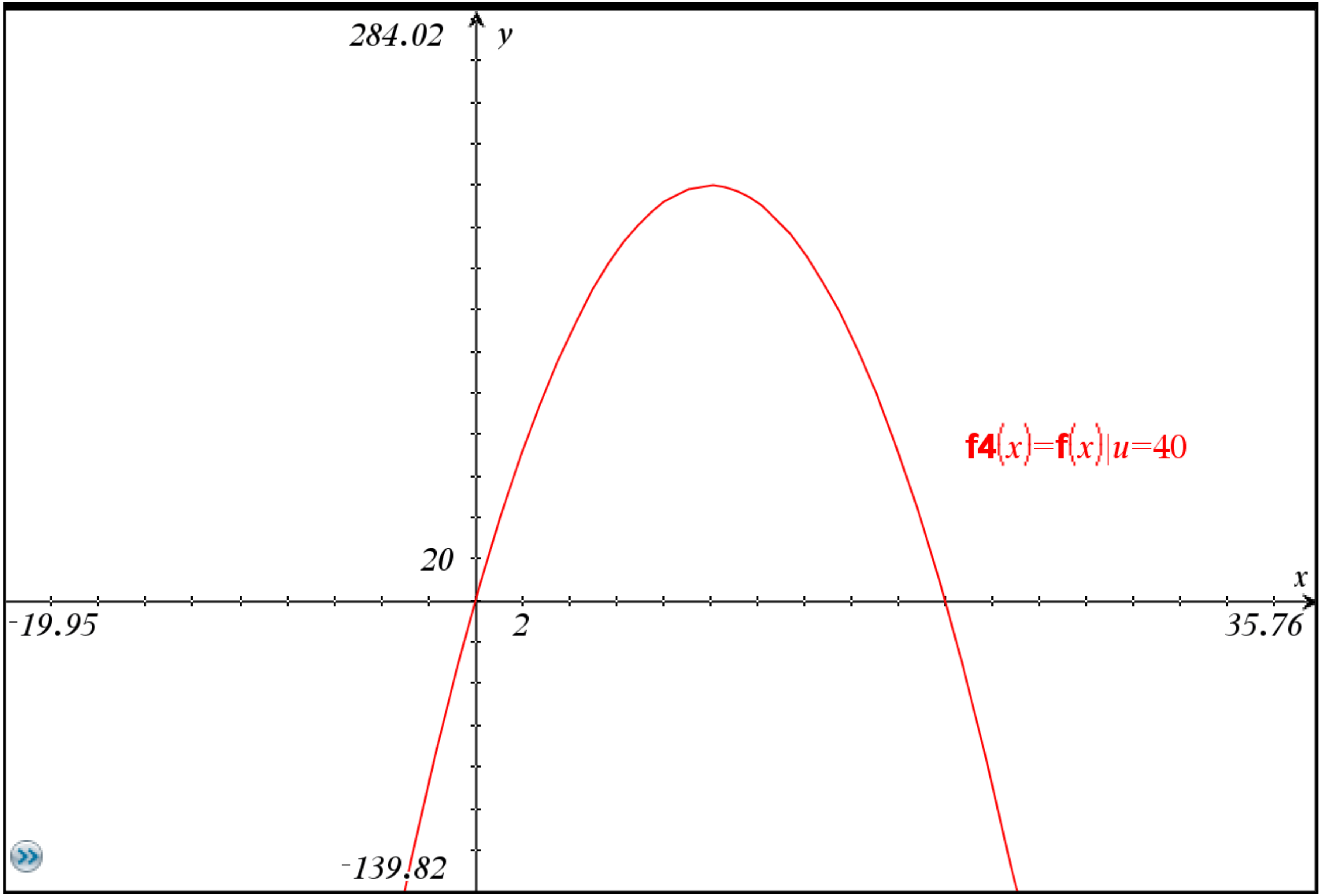
Der Umfang ist $u=2\cdot x+b$ ▸ $u=2\cdot x+b$ Die Fläche $\mathbf{f}(x):=x\cdot(u-2\cdot x)$ ▸ *Fertig*

$\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ $u-4\cdot x$ also $\mathbf{xmax}:=\frac{u}{4}$ ▸ $\frac{u}{4}$ Hier xmax=10 m

DIe andere Kante ist $u-2\cdot\mathbf{xmax}$ ▸ $\frac{u}{2}$ Hier bmax=20 m.

Auch bei dieser Aufgabe besteht das beste Rechteck aus zwei Quadraten.

2.4



2.5

FA 48 Quader, Ob min

FA 48 Es sind quaderförmige Behälter mit einem Volumen von 12 m³ herzustellen, bei denen die Breite halb so groß wie ihre Länge ist. Welche Maße muss ein solcher Behälter haben, damit zu seiner Herstellung möglichst wenig Material verbraucht wird?

Die heißen x,a,b. x sei die Breite und a die Länge. Dann gilt $2\cdot x \to \mathbf{a} \;\blacktriangleright\; 2\cdot x$. Für b gilt $\mathbf{b}:=\frac{v}{2\cdot x\cdot x} \;\blacktriangleright\; \frac{v}{2\cdot x^2}$. Nebenbedingungen

Materialverbrauch: $2\cdot(2\cdot x\cdot x+2\cdot x\cdot\mathbf{b}+x\cdot\mathbf{b}) \;\blacktriangleright\; \frac{3\cdot v+4\cdot x^3}{x}$

Zielfunktion $\mathbf{f}(x):=\frac{3\cdot v+4\cdot x^3}{x} \;\blacktriangleright\; \textit{Fertig}$

$\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x)) \;\blacktriangleright\; \frac{8\cdot x^3-3\cdot v}{x^2}$ ⚠ $\quad \text{solve}\left(\frac{8\cdot x^3-3\cdot v}{x^2}=0,x\right) \;\blacktriangleright\; x=\frac{(3\cdot v)^{\frac{1}{3}}}{2}$

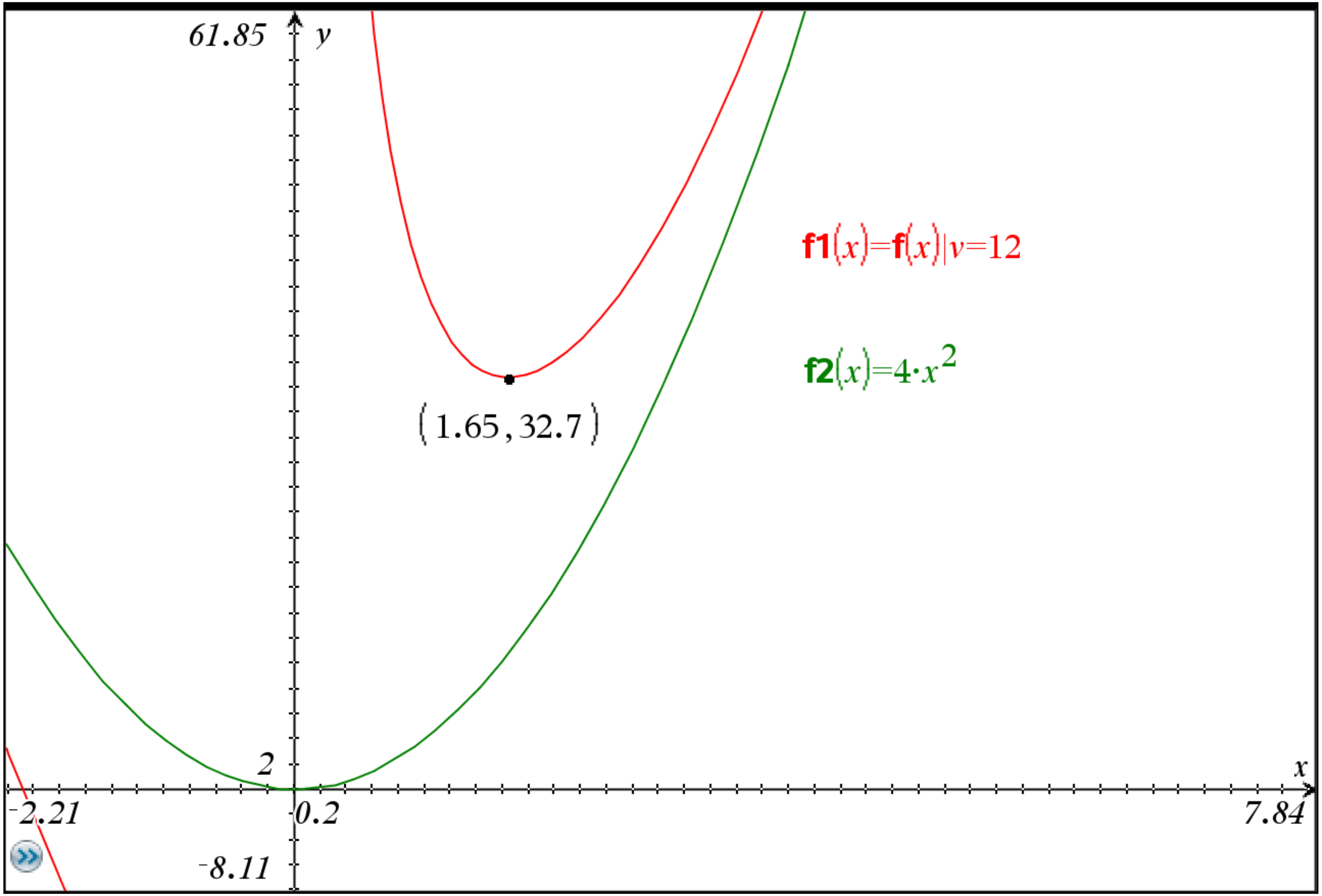
(nächste Seite)

3.1

$\mathbf{br}:=\frac{(3\cdot v)^{\frac{1}{3}}}{2}|v=12 \blacktriangleright \frac{6^{\frac{2}{3}}}{2}$ Das ist die Lösung für die Breite x.

Die Kantenlängensind (in m): $\mathrm{approx}(\mathbf{br}) \blacktriangleright 1.65096$ $\mathrm{approx}(2\cdot\mathbf{br}) \blacktriangleright 3.30193$
$\mathrm{approx}(\mathbf{b}|v=12)|x=\mathbf{br} \blacktriangleright 2.20128$ und der Materialverbrauch ist
$\mathbf{f}(1.65)|v=12 \blacktriangleright 32.7082$ m^3.

3.2



3.3

FA 49 "Glasrest"

separat)

Fall A Eine Rechteckseite auf die Katheten legen. (gelb)

Fall B Eine Rechteckseite auf die Hypotenuse legen. (blau)

Fall A Eine Seite x, die andere Seite q. Zielgröße Fläche f(x)=x*q

Nebenbedingung $\mathbf{nb}:=\frac{q}{b}=\frac{a-x}{a} \blacktriangleright \frac{q}{b}=\frac{-(x-a)}{a}$ $\text{solve}(\mathbf{nb},q) \blacktriangleright q=\frac{-b\cdot(x-a)}{a}$

Zielfunktion $\mathbf{f}(x):=x\cdot\frac{-b\cdot(x-a)}{a} \blacktriangleright$ *Fertig* Das ist eine Parabel, nach unten geöffnet, mit den Nullstellen 0 und a. Diese sind auch aus den Grenzlagen des Rechtecks zu schließen.

Ihr Maximum ist bei $\frac{a}{2} \blacktriangleright \frac{a}{2}$ für x. $\frac{-b\cdot(x-a)}{a}|x=\frac{a}{2} \blacktriangleright \frac{b}{2}$ ⚠ Auch die andere Seite muss halbeirt werden, wie auch der Strahlensatz erfordert.

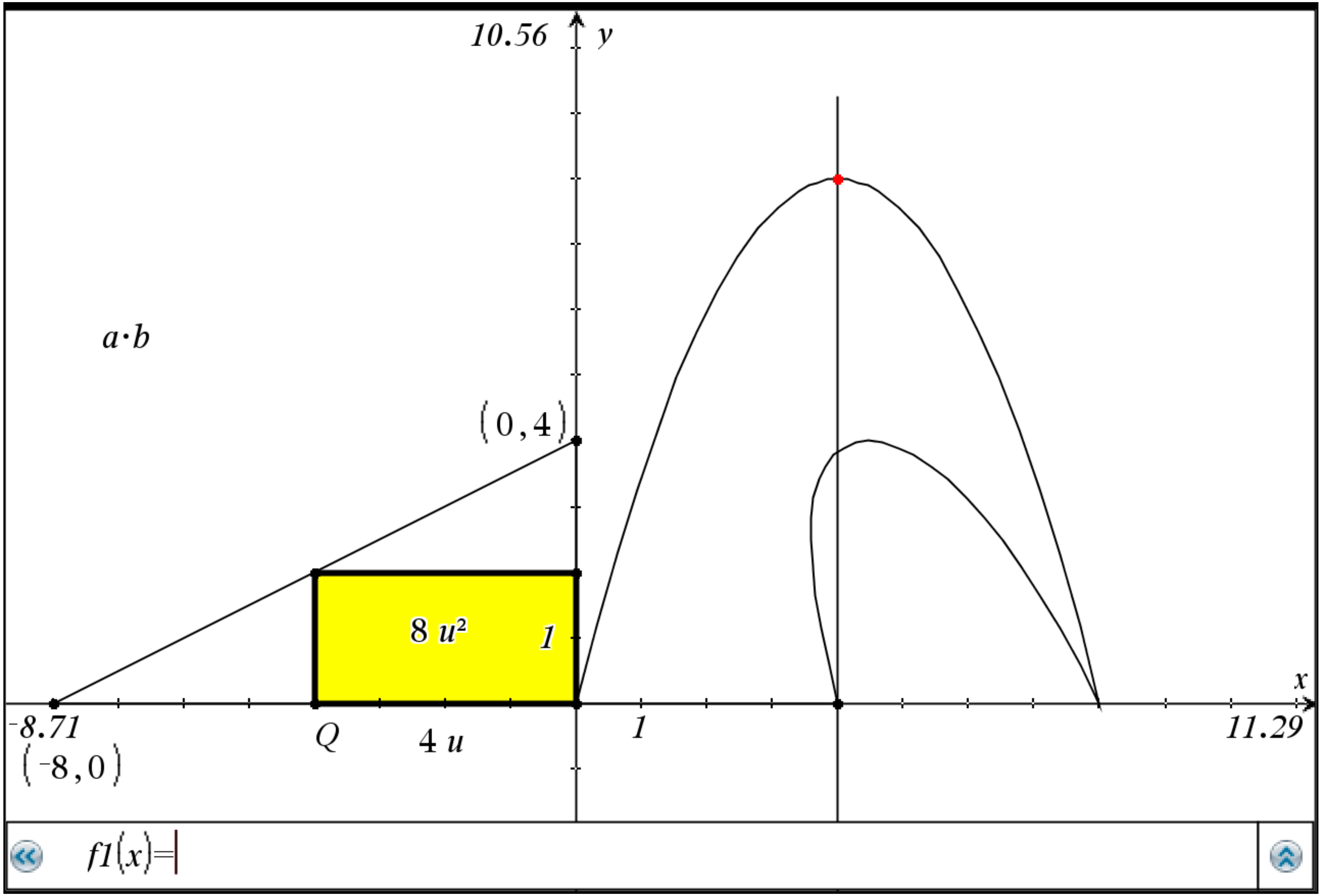
Der maximale Flächeninhalt ist dann also $\mathbf{f}\left(\frac{a}{2}\right) \blacktriangleright \frac{a\cdot b}{4}$ ⚠ , das ist die Hälfte der Dreiecksfläche. Mehr kann man nicht "rausholen",

4.1

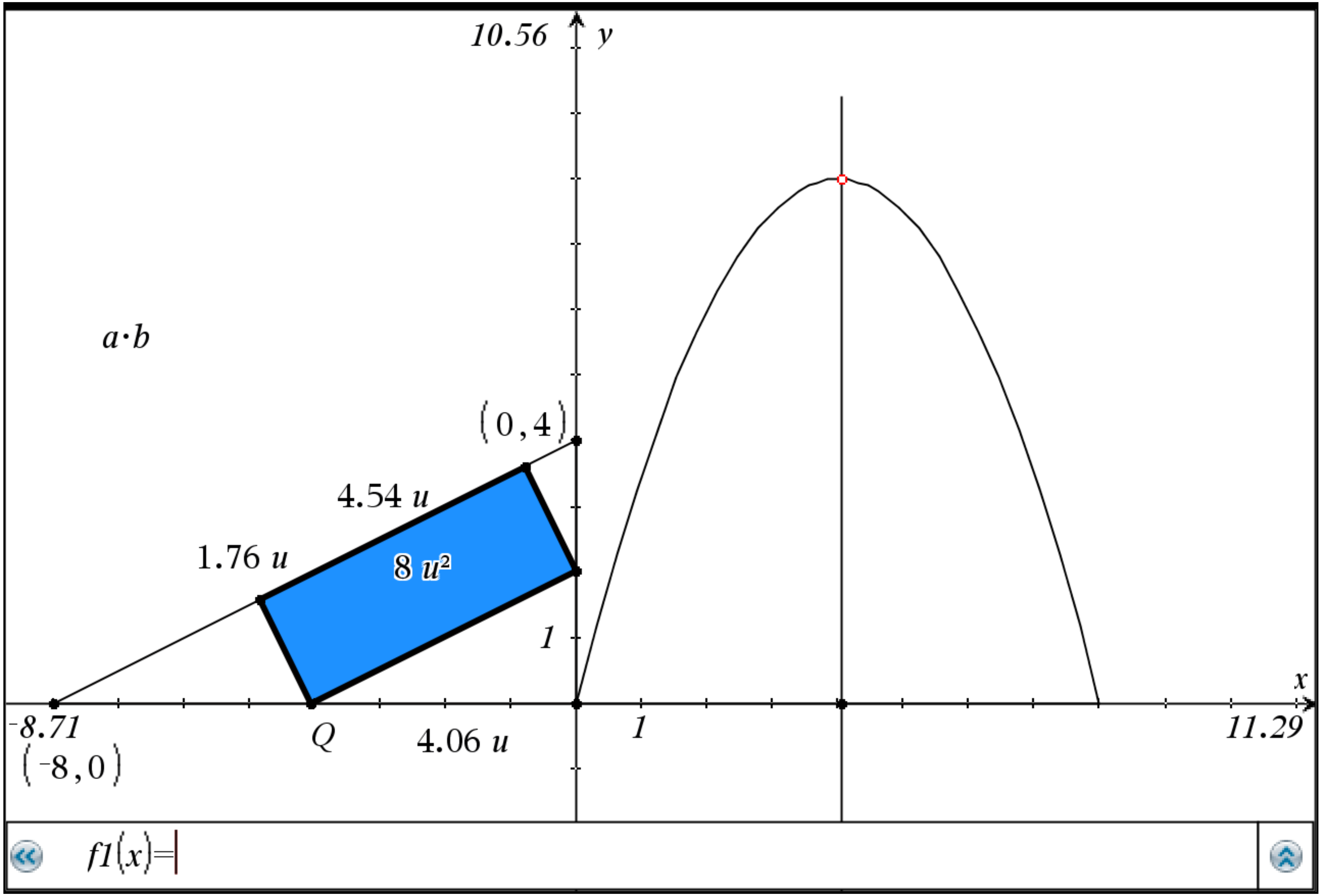
Ihr Maximum ist bei $\frac{a}{2}$ für x. $\frac{-b\cdot(x-a)}{a}|x=\frac{a}{2}$ ▸ $\frac{b}{2}$ ⚠ Auch die andere Seite muss halbeirt werden, wie auch der Strahlensatz erfordert.

Der maximale Flächeninhalt ist dann also $\mathbf{f}\left(\frac{a}{2}\right)$ ▸ $\frac{a\cdot b}{4}$ ⚠ , das ist die Hälfte der Dreiecksfläche. Mehr kann man nicht "rausholen",

4.2



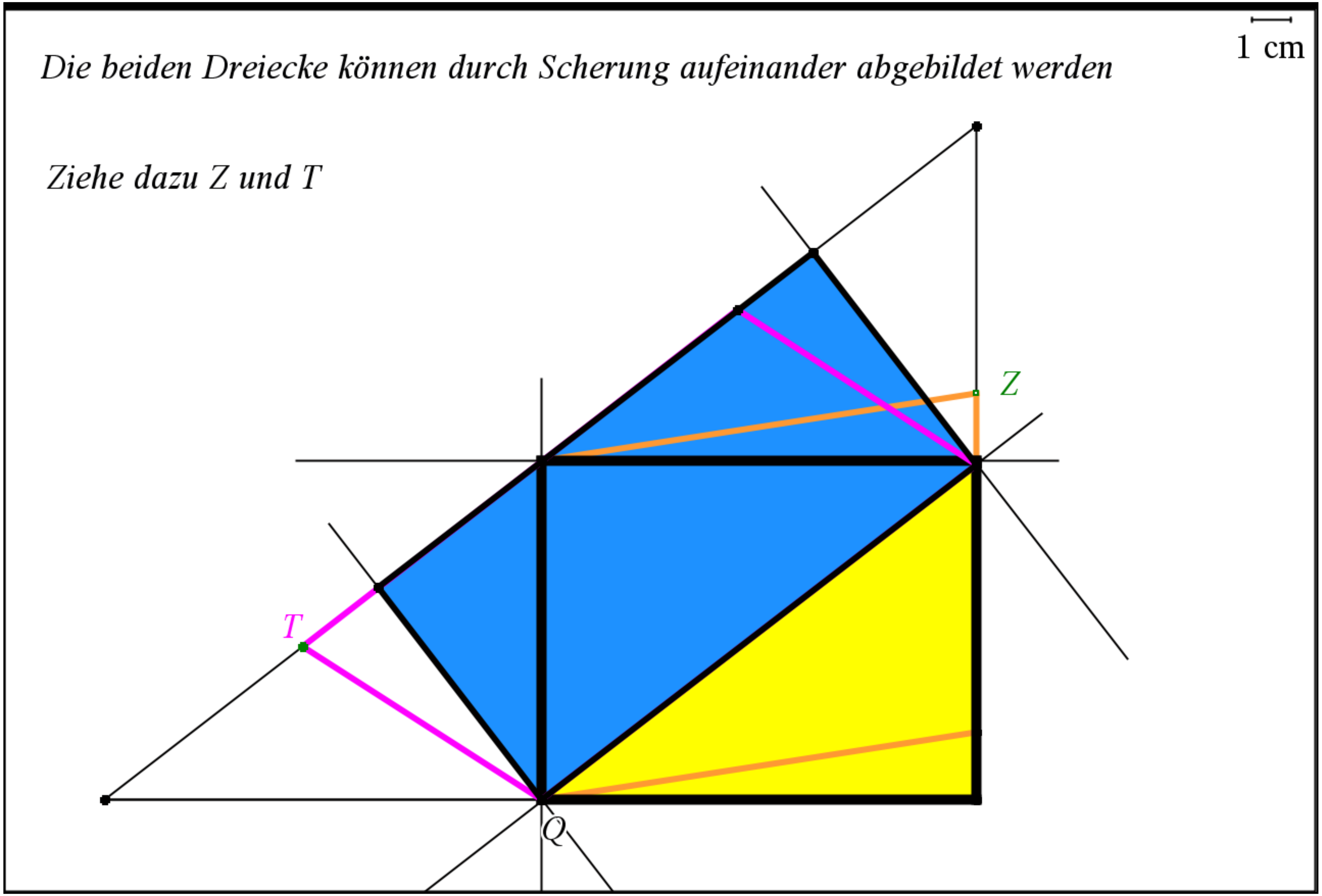
4.3



4.4

Die beiden Dreiecke können durch Scherung aufeinander abgebildet werden

Ziehe dazu Z und T



4.5

Fall B Wenn die eine Rechtecksseite die Hypotenuse ist:

Diesen Fall kann man durch **Scherung** auf den Fall zurückführen. Also hat man hier denselben Flächeninhalt für das optimale Rechteck.

Allerdings ist das Seitenverhältnis ein anderes, Seiten r und s.

$\mathbf{s}:=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}} \blacktriangleright \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ und $\mathbf{r}:=\frac{a\cdot b}{4\cdot \mathbf{s}} \blacktriangleright \frac{a\cdot b}{2\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$

$\mathbf{s}|a=8 \text{ and } b=4 \blacktriangleright 2\cdot\sqrt{5}$ $\quad \mathbf{r}|a=8 \text{ and } b=4 \blacktriangleright \frac{4\cdot\sqrt{5}}{5}$

$\mathbf{s}|a=8 \text{ and } b=4 \blacktriangleright 4.47214$ $\quad \text{approx}(\mathbf{r}|a=8 \text{ and } b=4) \blacktriangleright 1.78885$

Außer mit Scherung kann man in der besonderen optimalen Lage

auch elementar durch "**Abschneideflächen**" begründen, dann die beiden Rechtecke gleich sind. Dabei brauch man aber die Pythagorassatz−Variante für ähnliche auf die Dreiecksseiten aufgesetzte Figuren. Das gelb sichtbare Dreieck

4.6

FA 49 Auf einem Baugrundstück, das die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 80 m und 100 m hat, soll eine Halle mit rechteckiger Grundfläche errichtet werden. Bei welchen Abmessungen wird die Hallenfläche am größten?

Nun Bezug zur gestellten Aufgabe

$\mathbf{nb}|a=100 \text{ and } b=80 \blacktriangleright \frac{q}{80}=\frac{-(x-100)}{100}$ $\quad \text{solve}\left(\frac{q}{80}=\frac{-(x-100)}{100},q\right) \blacktriangleright q=\frac{-4\cdot(x-100)}{5}$

$\mathbf{f}(x)|a=100 \text{ and } b=80 \blacktriangleright \frac{-4\cdot x\cdot(x-100)}{5}$

$\mathbf{f}\left(\frac{a}{2}\right)|a=100 \text{ and } b=80 \blacktriangleright 2000$

Antwort: Die Halle muss die Abmessungen 50m X 40m haben. Sie hat dann einen Flächeninhalt von $2000\ m^2$.

4.7

A: Maßübertragung und B: Berechnung in den Graphfenstern.

B: Berechnung

Das erforderliche Menu ist beim Werkzeugsymbol

1. Vorbereitung mit "*8.Messung*" die zu den passenden Größen Messwerte herstellen und anzeigen (durch Enter)

2. *Aktionen Text* einfügen Berechnungsterm schreiben, z.b. $a \cdot b$

3. *Aktionen Berechnung*, den Text aus 2. anklicken.

4. Es kommt ein Fenster mit der Aufforderung die erste Zahl oder Variable einzugeben, z.B. nun den Messwert von a anklicken, dann den Messwert von b anklicken.

5. nun sofort neben dem Text aus 2 einfügen durch Enter.

4.8

A: Maßübertragung und B: Berechnung in den Graphfenstern.

B: Maßübertragung

Erst muss man sich klarmachen, was man wohin übertragen will. Es gibt viele Möglichkeiten, gut beschrieben im Online−Handbuch.

Suchwort Maßübertragung

Hier wird "*Maß auf Streckenlänge übertragen*" beschrieben.

(Strecke auf Strecke geht schneller mit dem Zirkel−Werkzeug (bei Konstruktion))

Menu Werkzeuge

A *Konstruktion 8 Maßübertragung* anklicken, Zahl anklicken oder eingeben,

A *Konstruktion 7 Zirkelwerkzeug,*

es erscheint an der Maus ein Kreis mit dem gewählten Radius. Diesen setzt man passend ab. Die gewünschte Strecke erhält man durch Schnitt des Kreises mit einer Geraden.

4.9

FA 50 Vari-Glasrest

platte soll wieder ein rechteckiges Stück mit möglichst großer Fläche geschnitten werden. Wie groß sind dabei die Seiten zu wählen? (Maße siehe Abbildung!)

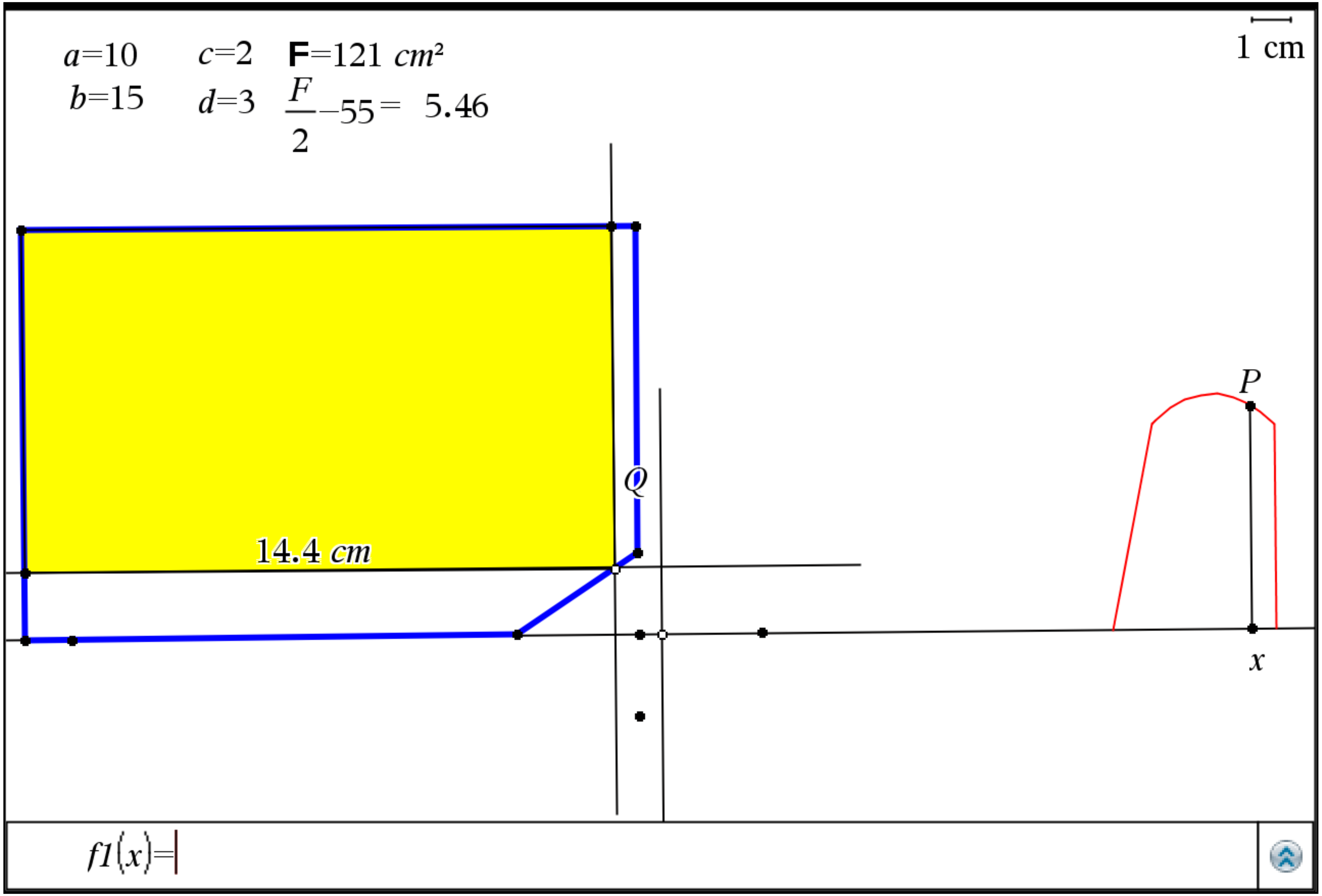
Die Längen nehme ich in dm.

Wenn man das Koordinatensytem in die linke untere Ecke legt, hat die Hypotenuse der abgeschnittenen Ecke die Gleichung $\mathbf{g}(x):=\frac{2}{3}\cdot(x-12)$ ▸ *Fertig*

Zielgröße: Der Flächeninhalt ist fl=x*h In dem Bereich mit der Schräge gilt $\mathbf{h}:=10-\mathbf{g}(x)$ ▸ $18-\frac{2\cdot x}{3}$ Also $\mathbf{fl}(x):=x\cdot\left(18-\frac{2\cdot x}{3}\right)$ ▸ *Fertig* $\mathbf{fl}(x)$ ▸ $\frac{-2\cdot x\cdot(x-27)}{3}$ Diese Parabel hat ihren Scheitel bei $\mathbf{xs}:=\frac{27}{2}$ ▸ $\frac{27}{2}$ und der Flächenimhalt ist

$\mathbf{fl}(\mathbf{xs})$ ▸ $\frac{243}{2}$ $\mathbf{fl}(\mathbf{xs})$ ▸ 121.5 Anfang der Schräge x=12, Ende x=15 $\mathbf{fl}(12)$ ▸ 120 $\mathbf{fl}(15)$ ▸ 120 Andere Platte ist sind sicher kleiner. Also Bei einer Breite von 135 cm und einer Höhe von $\mathbf{h}|x=\frac{27}{2}$ ▸ 9 90cm entsteht der maximae Inhalt 12150 cm^2

5.1



5.2