Ableitung der Sinusfunktion, mit Beweis

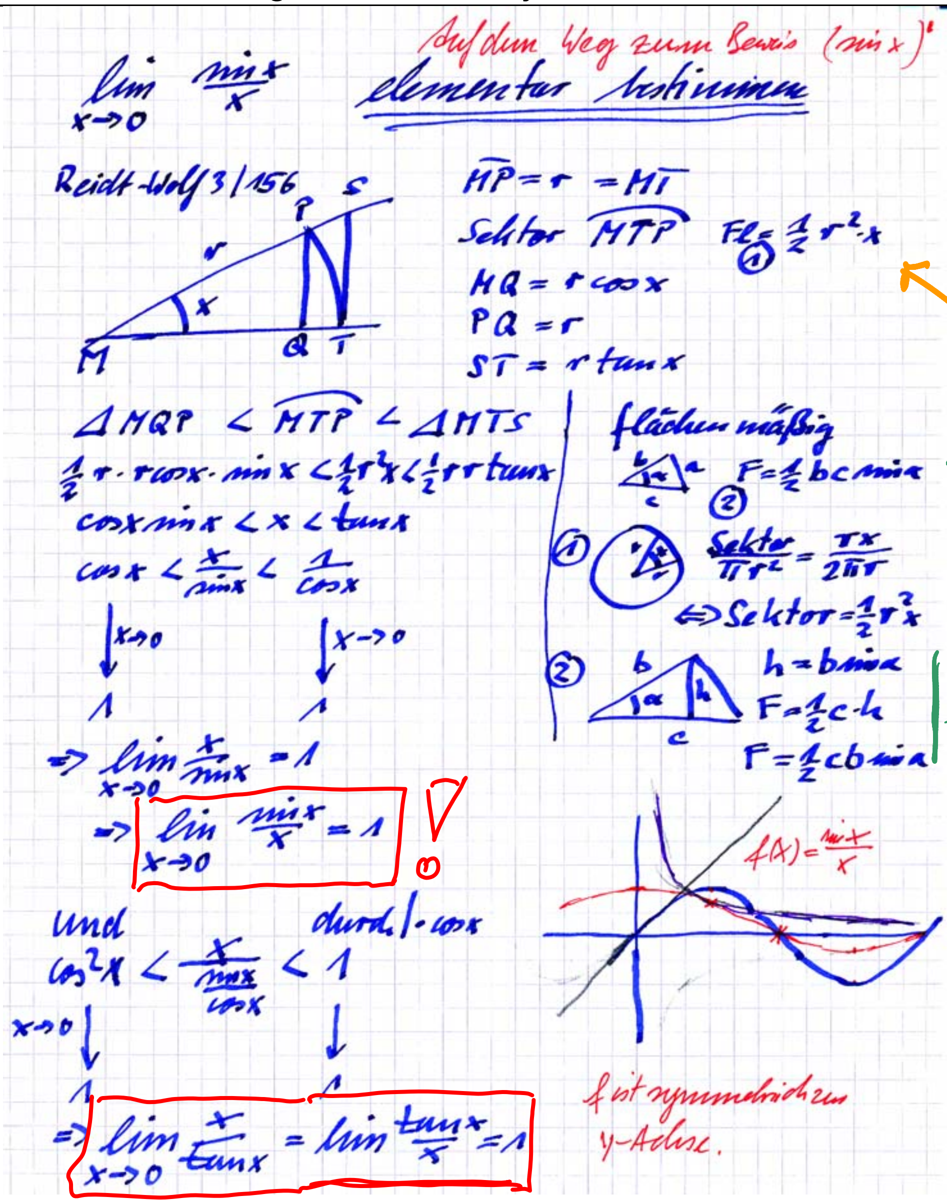
Empfohlene Vorgehensweise: Sehen Sie sich (mit Ihren Schülern) mit den Dateien (z.B. GeoGebra) zum interaktiven Ableiten den Graphen der Ableitung der Sinusfunktion an. Klar, jeder sieht, dass es sich um die Kosinusfunktion handeln müsste.

Lassen Sie GeoGebra noch selbst den Kosinus zeichnen. Der passt dann genau auf die Ortskurve. Damit haben Sie $(\sin(x))' = \cos(x)$.

Gut, das ist kein "Beweis", aber Sie können dasselbe ja in (fast) beliebig kleinen Ausschnitten auch machen. Für eine Lehrsituation ist jetzt alles klar.

Das Folgende zeigt, was man machen müsste, damit man es wirklich beweist.

Das geschieht in drei Schritten. Der erste ist schwierigste: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$ muss elementar bestimmt werden. Wenn man das nur durch Graphenbegucken macht, dann kann man gleich den oben empfohlenen Weg nehmen. Wenn man es mit l'Hospital oder Taylor macht, dreht man sich im Kreis, denn diese Wege verwenden die Ableitung, die man hier ja erst beschaffen will.



Unten auf Seite 1 ist noch $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ bewiesen, das ergibt sich aus demselben Beweis, wird aber im Weiteren nicht benötigt.

Zweiter Schritt: Beweis von

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$ unter Verwendung von $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Achtung: in diesem Zusammenhang kann nur Beweis 1 verwendet werden!!!!!!!!

Auf dem Weg zum Beweis von $(\sin x)'$ kommt nur ① in Frage.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ ① elementar unter Nutzung $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - 1}{x} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$$

$$= \frac{\cos^2 x - 1}{x \cdot (\cos x + 1)} = \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)}$$

$$= - \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\downarrow x\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x}{\cos x + 1}}_{\downarrow x \to 0}$$

$$= - 1 \cdot 0$$

$$= 0$$

Also $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

② mit l'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1} = 0$$

③ mit Taylorreihe

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots \right) \right) = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \ldots \right)$$

$$= 0$$

Dritter Schritt: Die Betrachtung des Differenzenquotienten und die Bestimmung seines Grenzwertes

Dabei wird das folgende Additionstheorem verwendet:

$$\sin(x+h)=\sin(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\sin(h)$$

Das hat man heute in der Schule meist auch nicht zur Verfügung!!!!!

Ableitung $(\sin x)'$ Beweis

$$msek(x,h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$=\sin x\cdot\underbrace{\frac{\cos h-1}{h}}_{\downarrow h\to 0}+\cos x\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\downarrow h\to 0}$$

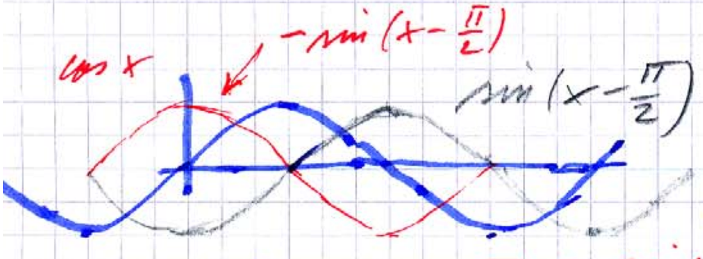
$$(\sin x)'=\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1$$

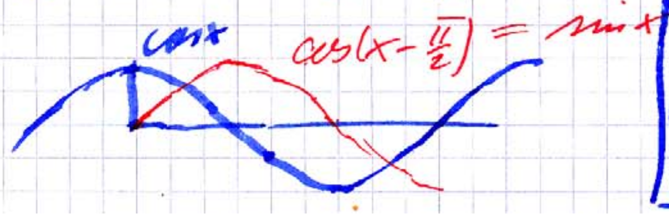
$$\boxed{(\sin x)'=\cos x}$$

$$\cos x=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)'=-\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)'=-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\sin(x)$$





$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$$