L'Hospitalsche Regel **Haftendorn Nov. 2010**

Untersuchungen zu Grenzwerten vom Typ 1: $\frac{0}{0}$ oder Typ 2: $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \blacktriangleright 1$ Wie geht das von Hand?

L'Hospitalsche Regel: f und g seien in a differenzierbar und es gelte f(a)=g(a)=0 dann gilt:

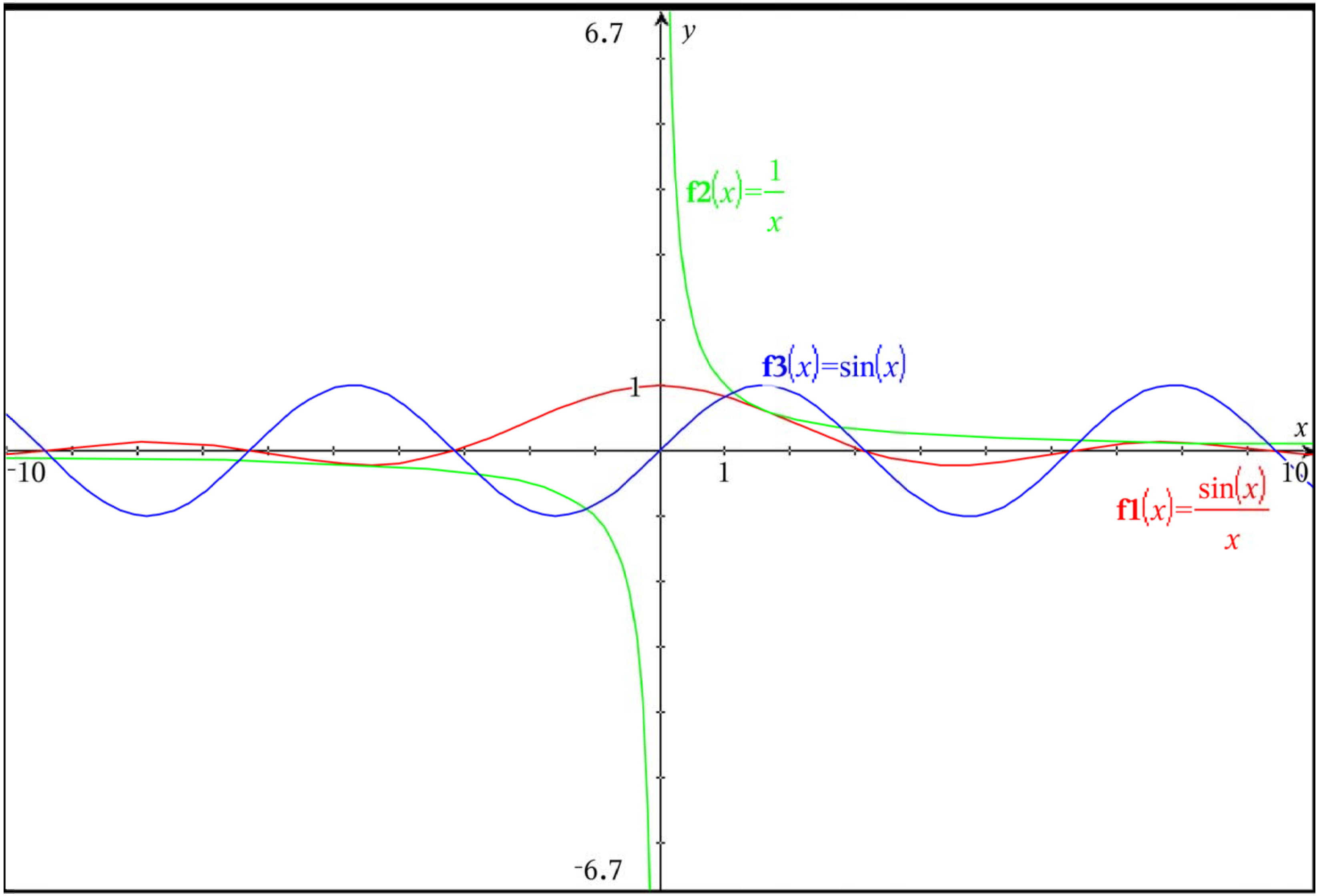
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

$\frac{d}{dx}(\sin(x)) \blacktriangleright \cos(x)$ und $\frac{d}{dx}(x) \blacktriangleright 1$ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{1}\right) \blacktriangleright 1$

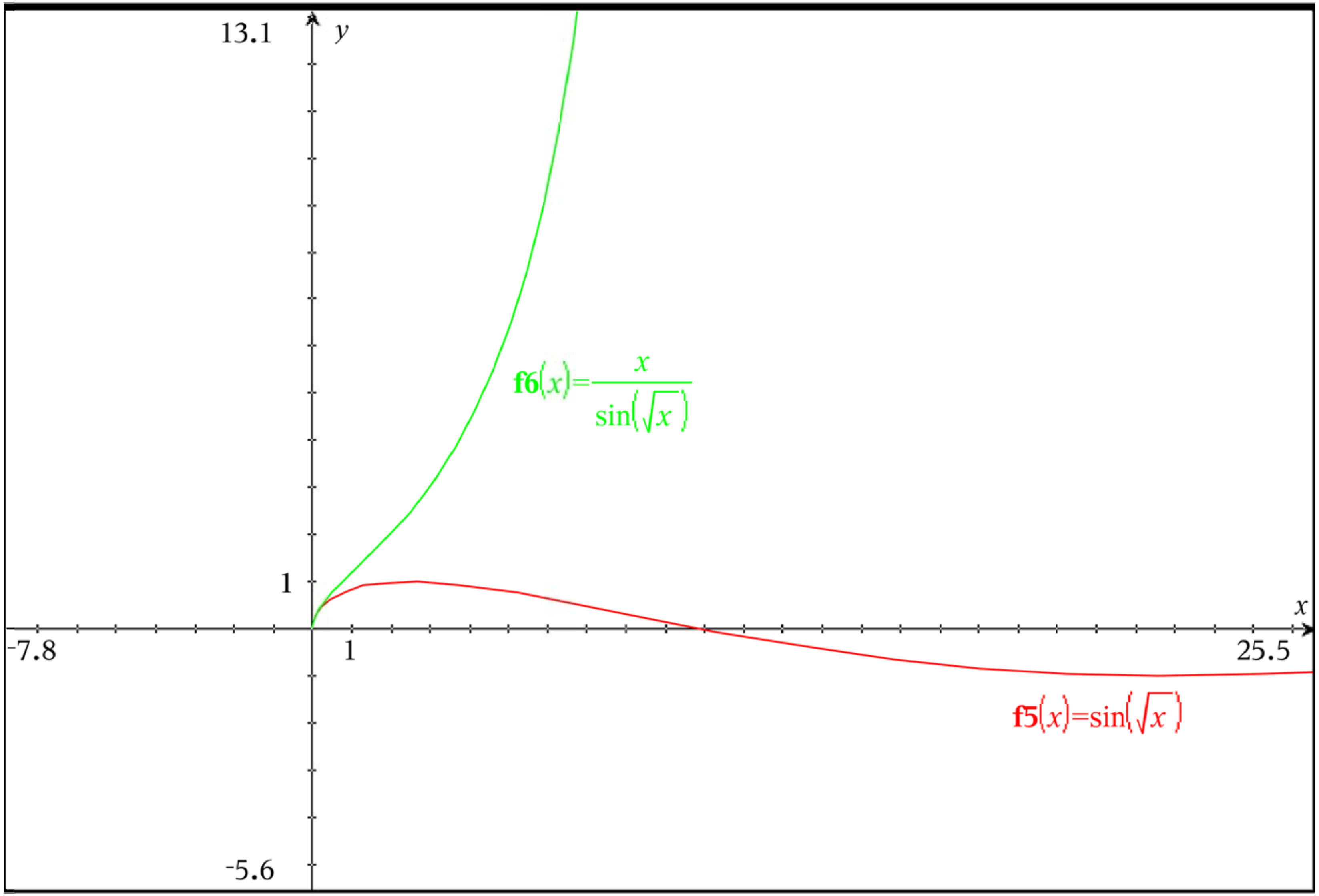
Man muss also Zähler und Nenner getrennt ableiten. (nicht!!! Quotientenregel)

Auf den Grafik- und den Calculusseiten sind etliche gängige Beispiele.

1.1



1.2



1.3

$\mathbf{f6}(x):=\frac{x}{\sin(\sqrt{x})}$ *Grenzwert bei x=0* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(\sqrt{x})}\right) \blacktriangleright 0$

Von Hand mit der Regel von ' Hospital: $\frac{d}{dx}(\sin(\sqrt{x})) \blacktriangleright \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\cdot \sqrt{x}}$

und damit $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cdot \sqrt{x}\cdot 1}{\cos(\sqrt{x})}\right) \blacktriangleright 0$

Ableitung factor$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sin(\sqrt{x})}\right)\right) \blacktriangleright \frac{-(\cos(\sqrt{x})\cdot \sqrt{x}-2\cdot \sin(\sqrt{x}))}{2\cdot (\sin(\sqrt{x}))^2}$ ⚠

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-(\cos(\sqrt{x})\cdot \sqrt{x}-2\cdot \sin(\sqrt{x}))}{2\cdot (\sin(\sqrt{x}))^2}\right) \blacktriangleright \text{undef}$

1.4

$$\frac{d}{dx}\left(-\left(\cos\left(\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}-2\cdot\sin\left(\sqrt{x}\right)\right)\right) \blacktriangleright \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}+\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\cdot\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(2\cdot\left(\sin\left(\sqrt{x}\right)\right)^2\right) \blacktriangleright \frac{2\cdot\sin\left(\sqrt{x}\right)\cdot\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$$

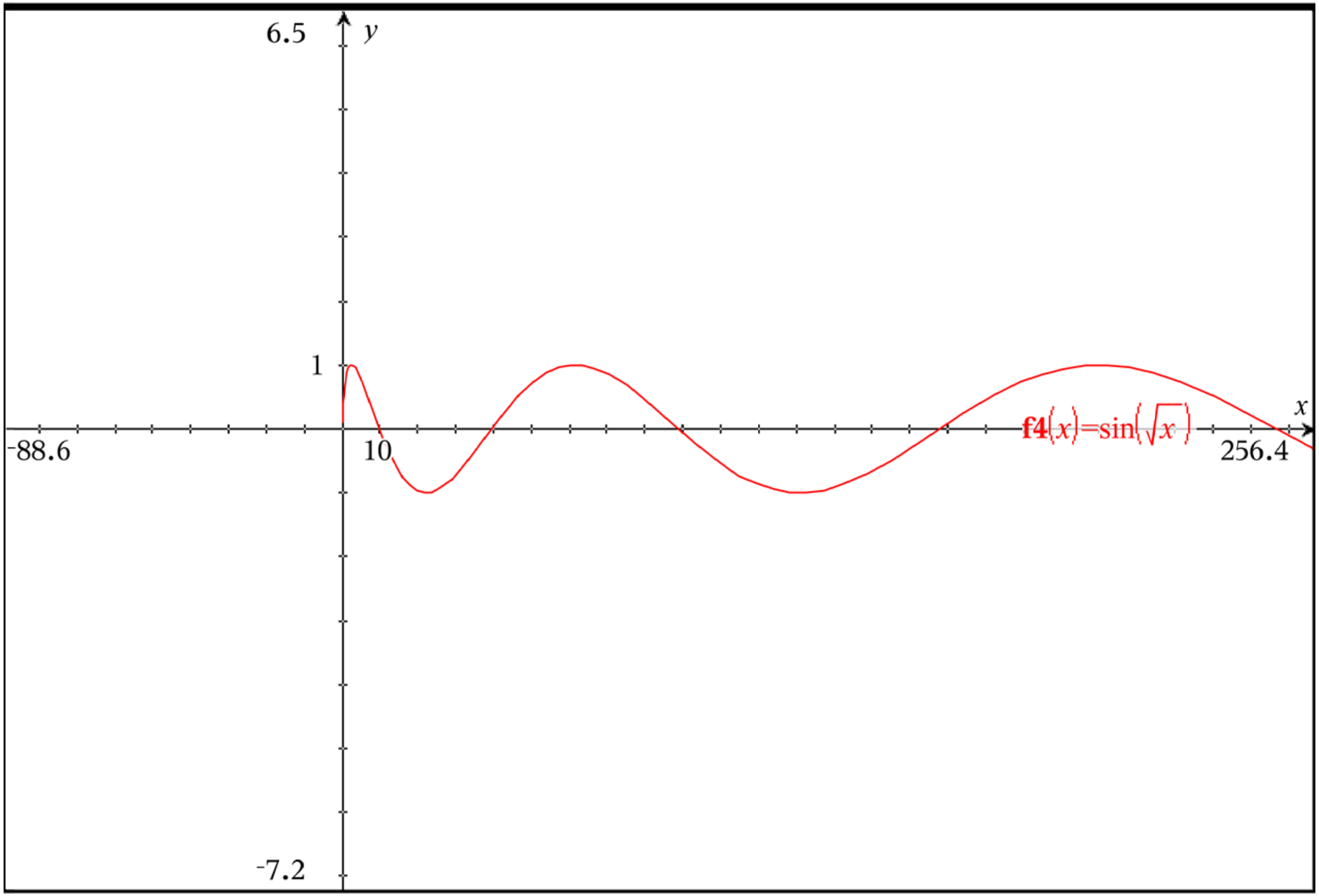
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}+\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\cdot\sin\left(\sqrt{x}\right)\cdot\cos\left(\sqrt{x}\right)}\right) \blacktriangleright \text{undef}$$

$$\text{expand}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}+\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\cdot\sin\left(\sqrt{x}\right)\cdot\cos\left(\sqrt{x}\right)}\right) \blacktriangleright \frac{\sqrt{x}}{2\cdot\cos\left(\sqrt{x}\right)}+\frac{1}{2\cdot\sin\left(\sqrt{x}\right)}$$

Der Grenzwert ist 0 + unendlich, also bestimmte Divergenz.

Das zeigt auch das Bild. Senkrechtes Hineinlaufen in den Ursprung.

1.5

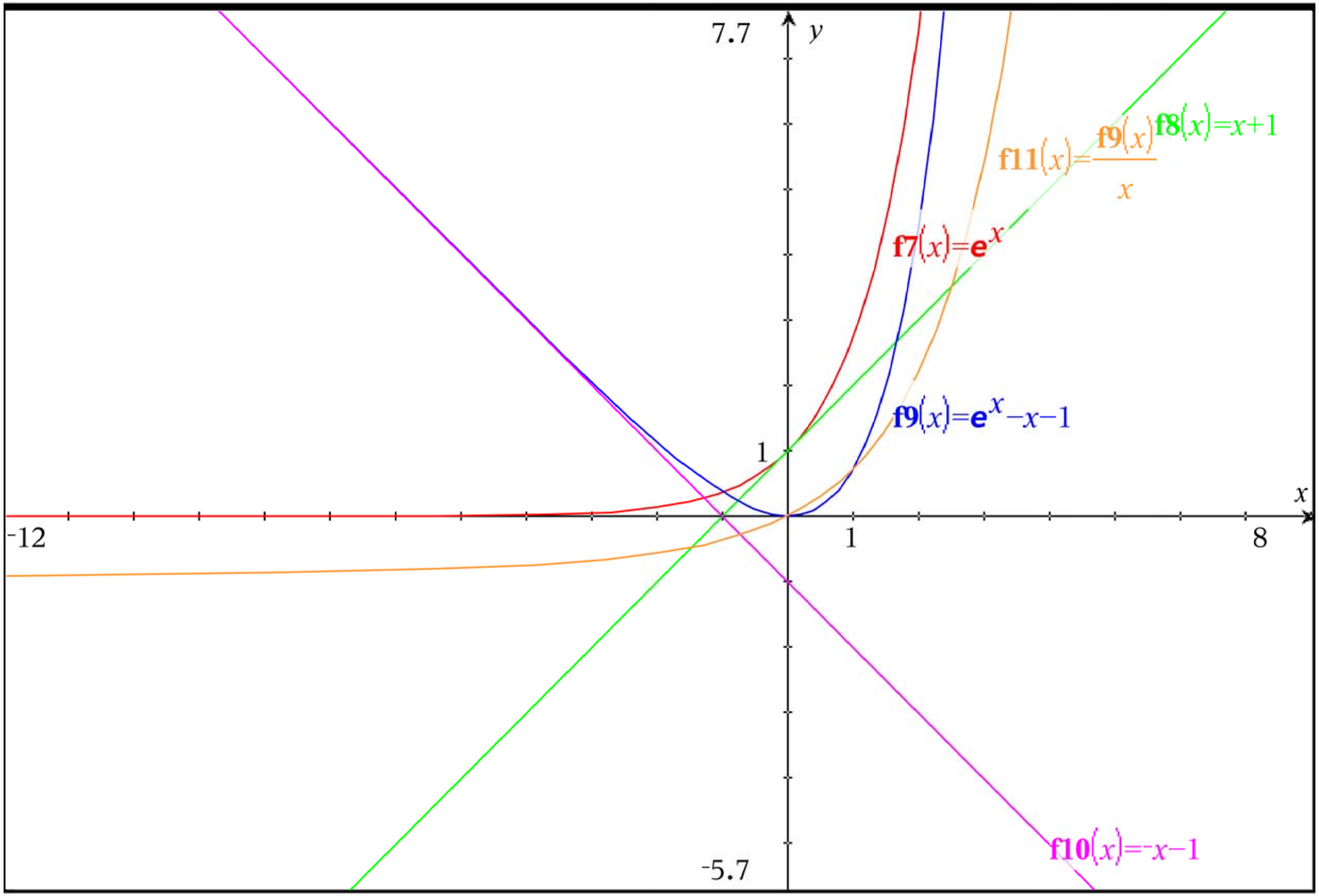


1.6

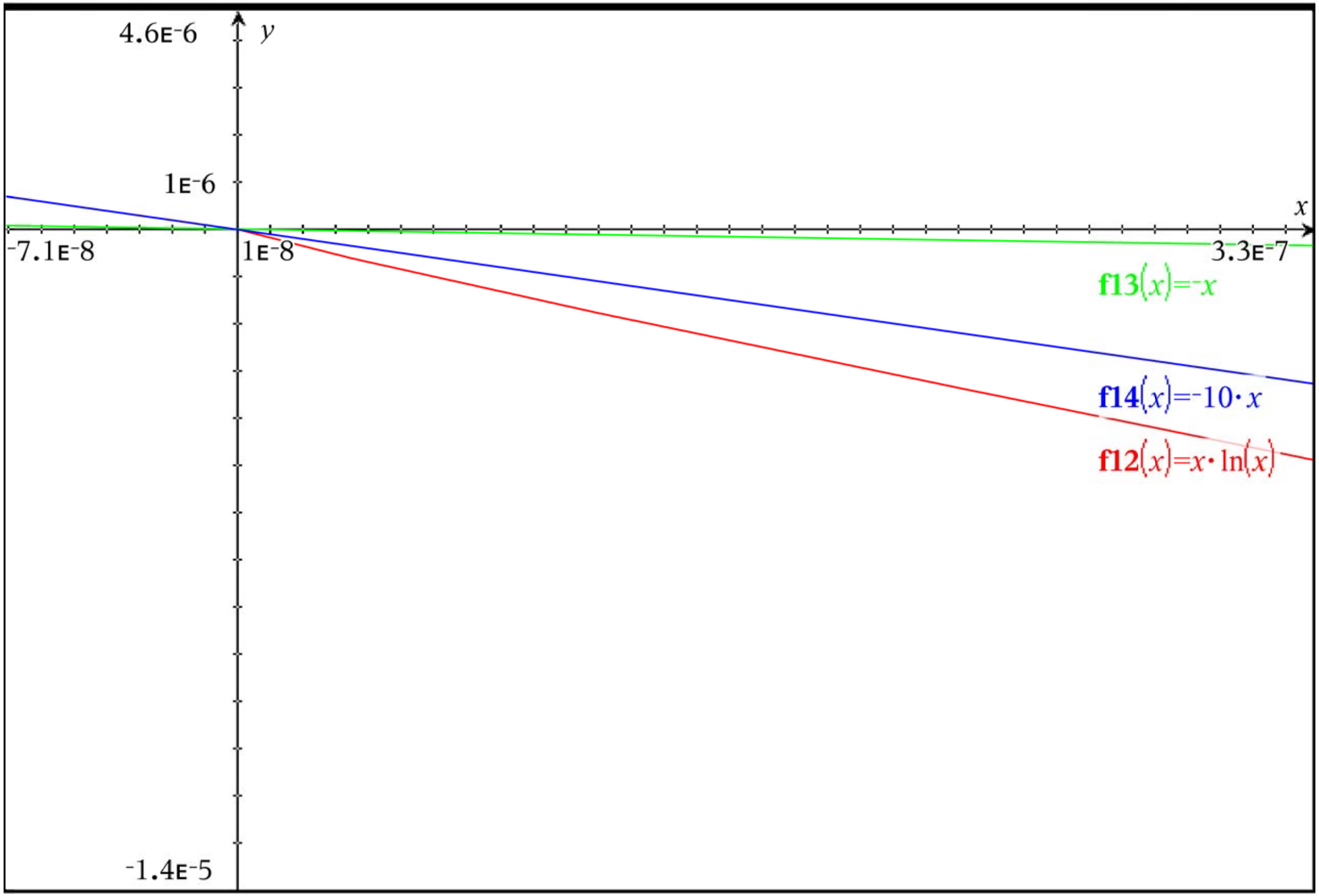
$\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$	1
$\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{e^{x}-x-1}{x}\right)$	0
$\lim\limits_{x \to 0}\left(x \cdot \ln(x)\right)$	0
$\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x}{\sin(\sqrt{x})}\right)$	0
$\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x}{\sin(x^2)}\right)$	undef
$\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x^2}{\sin(x^2)}\right)$	1

6/99

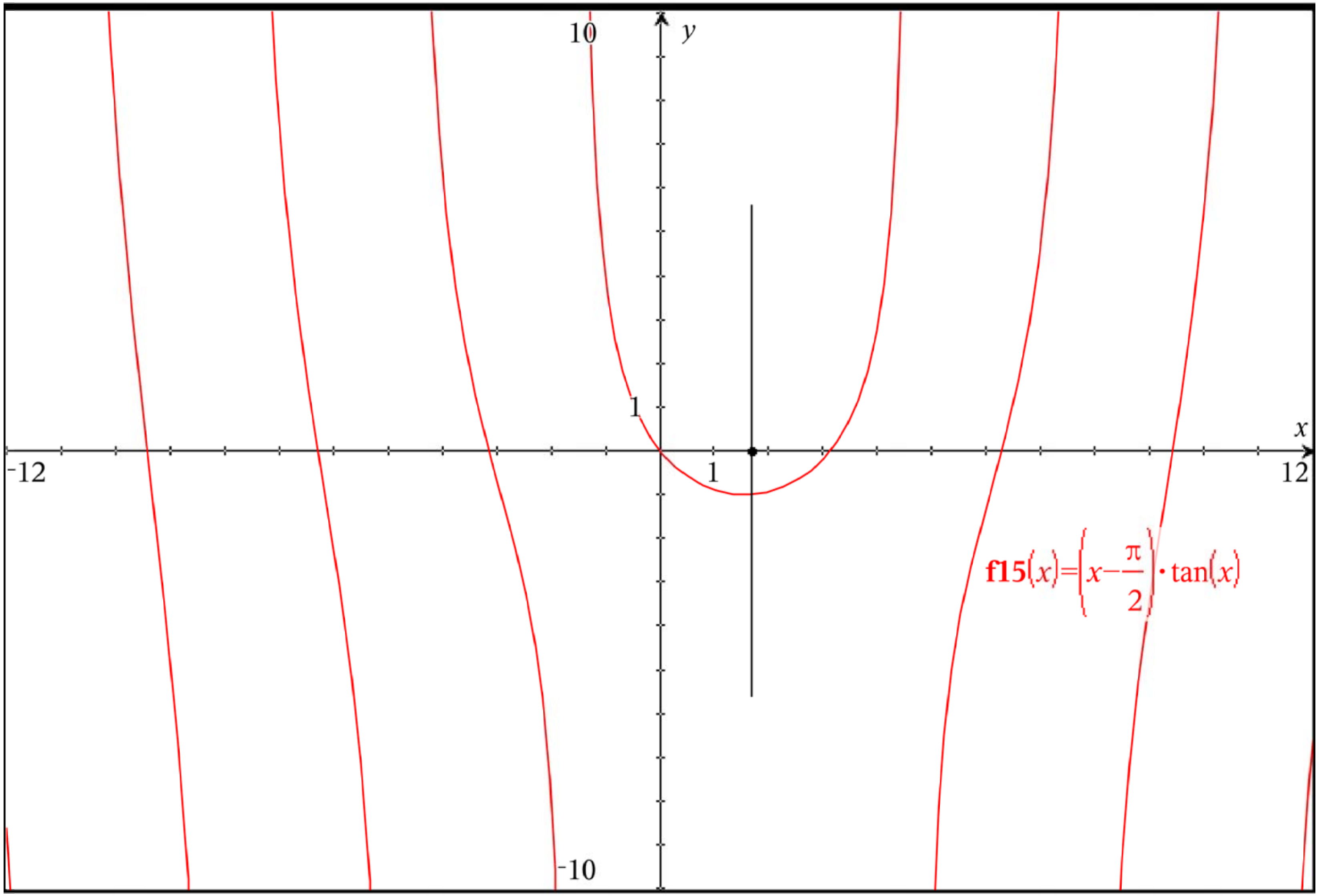
1.7



1.8



1.9



1.10

$\frac{d}{dx}(x \cdot \ln(x))$	$\ln(x)+1$
$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sin(x^2)}\right)$	undef
$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x^3}{\sin(x^2)}\right)$	0

3/99

1.11