$\boxed{\text{Kettenregel}}$ mit Beweis ohne Bruchkürzen

$$y = f(x) = g(k(x)) = g(z) \quad \text{mit } z = k(x)$$
und g, k diffbar

z.B. $y = \sin(x^2) = \sin(x^2) = \sin(z)$ mit $z = x^2$

Behauptung $\boxed{f'(x) = g'(z) \cdot k'(x)}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

$$f'(x) = (\sin(x^2))' = \cos(z) \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$\boxed{\text{Beweis}}$ Taylorreihe $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \text{rest} \cdot (x-x_0)$

mit $x = x_0 + h \Rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \text{rest} \cdot h$

mit $\text{rest} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

also für $x = x_0$

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + \text{rest} \cdot h \quad (1)$$

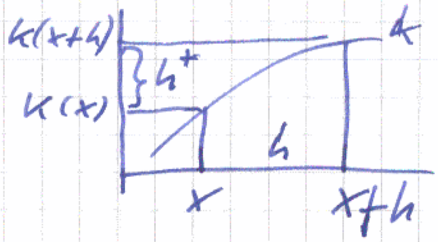
also auch $g(z+h^*) - g(z) = g'(z) \cdot h^* + r_g \cdot h^* \quad (2)$

und $h^* = k(x+h) - k(x) = k'(x) \cdot h + r_k \cdot h \quad (3)$

(1) ist für dieses f nachzuweisen für alle x, für die (2) und (3) gelten.

k ist diffbar in x

$\Rightarrow h^* \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \quad (\Rightarrow k \text{ stetig})$



(1) linke Seite

$$f(x+h) - f(x) = g(k(x+h)) - g(k(x)) = g(k(x)+h^*) - g(k(x))$$

$$= g(z+h^*) - g(z) \underset{(2)}{=} g'(z) \cdot h^* + r_g \cdot h^*$$

$$\underset{(3)}{=} g'(z) \cdot (k'(x) \cdot h + r_k \cdot h) + r_g(k'(x) \cdot h + r_k h)$$

$$= g'(z) \cdot k'(x) \cdot h + \underbrace{(\underbrace{g'(z)}_{\text{beschränkt}} r_k + r_g \underbrace{k'(x)}_{\text{beschränkt}} + r_k)}_{\text{Rest mit Rest} \xrightarrow[h \to 0]{} 0} \cdot h$$

damit ist rechte Seite von (1) erreicht

mit

$$f'(x) = g'(z) \cdot k'(x)$$

qed.

Ha 06/03