Numerische Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung ist gegeben in der Form $y' = g(x, y)$

mit der Anfangsbedingung $y(x_o) = y_o$.

Die numerischen Verfahren zur Beschaffung einer Lösung tasten sich - mit Hilfe der durch die DGL gegebenen Information über die Steigung - von $P_o(x_o,y_o)$ vorwärts zu einem nächsten Punkt $P_1(x_1,y_1)$, dann zu P_2 , P_3 und so fort.

Der Fehler, den man dabei in Kauf nehmen muß , hängt natürlich von der Schrittweite h ab, mit der man von einem zum nächsten Punkt geht.
Ganz wesentlich ist aber auch das Verfahren, mit dem man arbeitet.
Im Zeitalter der rechnerischen Bewältigung mit Computern kann man ohne Probleme die Schrittweite h klein halten und dann ein weniger aufwendiges Verfahren wählen.
Die genaueren Verfahren bilden in mehr oder weniger aufwendiger Weise Mittelwerte aus Steigungen, die in der Nähe des gesuchten neuen Punktes dem durch die DGL gegebenen Richtungsfeld entsprechen. Bei den hier angesprochenen **Einschrittverfahren** geht in die Berechnung des nächsten Punktes allein der vorige Punkt ein. Die **Ordnung p** des Verfahrens gibt an, daß die Größenordnung des Fehlers bei der Angabe der Richtungen höchstens $\mathbf{h^p}$ ist.

\$ Eulerverfahren = Runge-Kutta-Verfahren 1. Ordnung. Achtung: systematischer Fehler!!!

$$x_1 = x_o + h \quad , \quad y_1 = y_o + h\, g(x_o, y_o)$$

$$x_2 = x_1 + h \quad , \quad y_2 = y_1 + h\, g(x_1, y_1) \quad \ldots$$

$$x_{k+1} = x_k + h \quad , \quad y_{k+1} = y_k + h\, g(x_k, y_k)$$

\$ Verfahren von Heun = Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung. Ein gutes Verfahren!

Der Punkt, der beim Eulerverfahren als neuer Punkt genommen wird, dient hier als Hilfspunkt $P(x_1,z)$ zur Beschaffung einer Hilfssteigung m_z . Der neue Punkt wird dann mit dem Mittelwert zweier Steigungen bestimmt.
Nacheinander wird berechnet:

$$x_1 = x_o + h \quad , \quad m_o = g(x_o, y_o) \quad , \quad z = y_o + h\, m_o$$

$$m_z = g(x_1, z) \quad , \quad y_1 = y_0 + h\,\frac{m_0 + m_z}{2}$$

$$x_2 = x_1 + h \quad , \quad m_1 = g(x_1, y_1) \quad , \quad z = y_1 + h\, m_1$$

$$m_z = g(x_2, z) \quad , \quad y_2 = y_1 + h\,\frac{m_1 + m_z}{2}$$

$$x_{k+1} = x_k + h \quad , \quad m_k = g(x_k, y_k) \quad , \quad z = y_k + h\, m_k$$

$$m_z = g(x_{k+1}, z) \quad , \quad y_{k+1} = y_k + h\,\frac{m_k + m_z}{2}$$