Differentialgleichungen

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, MuPAD 4, http://haftendorn.uni-lueneburg.de Aug.06

Automatische Übersetzung aus MuPAD 3.11, ursprünglich 09.10.01 überarbeitet Sept. 05

Es fehlen nocht textliche Änderungen, die MuPAD 4 direkt berücksichtigen, das ist in Arbeit.

Web: http://haftendorn.uni-lueneburg.de www.mathematik-verstehen.de

++

```
dgl:=ode(y'(x)-2*y(x)=sin(x),y(x));//DGL eintragen
```

$$\mathrm{ode}\left(-\sin(x)-2\cdot y(x)+\frac{\partial}{\partial x}y(x),\ y(x)\right)$$

```
solve(dgl)
```

$$\left\{C2\cdot e^{2\cdot x}-\frac{2\cdot\sin(x)}{5}-\frac{\cos(x)}{5}\right\}$$

```
yallg:=op(solve(dgl));
```

$$C2\cdot e^{2\cdot x}-\frac{2\cdot\sin(x)}{5}-\frac{\cos(x)}{5}$$

```
yy:=x->yallg:yy(1)  //Funktion daraus machen:Dieses gelingt nicht.
```

$$C2\cdot e^{2\cdot x}-\frac{2\cdot\sin(x)}{5}-\frac{\cos(x)}{5}$$

```
yloesAllg:=xx->subs(yallg,x=xx): //Ohne diesen Klimmzug ging es nich
yloesAllg(x)
```

$$C2\cdot e^{2\cdot x}-\frac{2\cdot\sin(x)}{5}-\frac{\cos(x)}{5}$$

```
yloesAllg(PI)
```

$$C2\cdot e^{2\cdot \pi}-\frac{2\cdot\sin(\pi)}{5}-\frac{\cos(\pi)}{5}$$

ode heißt ordinary differential equation, gewöhnliche Differentialgleichung, als Argument hat ode die eigentliche
Gleichung und die Funktion, die gesucht ist. solve kann die so gegebene Differentialgleichung allgemein lösen.

Anfangswertproblem

```
x0Wert:=-1:y0Wert:=0://AWP  eintragen, x0, x0 sollen freie Variable
dglAWP:=ode({y(x0Wert)=y0Wert,  y'(x)-2*y(x)=sin(x)  },y(x));//DGL e
```

$$\mathrm{ode}\left(\left\{y(-1)=0,\ -\sin(x)-2\cdot y(x)+\frac{\partial}{\partial x}y(x)\right\},\ y(x)\right)$$

```
loes:=xx->subs(op((solve(dglAWP))),x=xx):
loes(x);simplify(loes(x));  float(simplify(loes(x)));
```

$$\frac{\cos(1)\cdot e^2\cdot e^{2\cdot x}}{5}-\frac{2\cdot\sin(x)}{5}-\frac{\cos(x)}{5}-\frac{2\cdot e^2\cdot e^{2\cdot x}\cdot\sin(1)}{5}$$

$$\frac{\cos(1)\cdot e^2\cdot e^{2\cdot x}}{5}-\frac{2\cdot\sin(x)}{5}-\frac{\cos(x)}{5}-\frac{2\cdot e^2\cdot e^{2\cdot x}\cdot\sin(1)}{5}$$

$$-1.688605715\cdot e^{2.0\cdot x}-0.2\cdot\cos(x)-0.4\cdot\sin(x)$$

Proben für diese Lösung:

```
loes'(x)-2*loes(x)  //linke Seite der DGL eintragen, rechts muss dan
```

$$\sin(x)$$

```
loes(x0Wert)=y0Wert; float(loes(x0Wert))=y0Wert
```

$$\frac{\cos(1)}{5}-\frac{\cos(-1)}{5}-\frac{2\cdot\sin(-1)}{5}-\frac{2\cdot\sin(1)}{5}=0$$

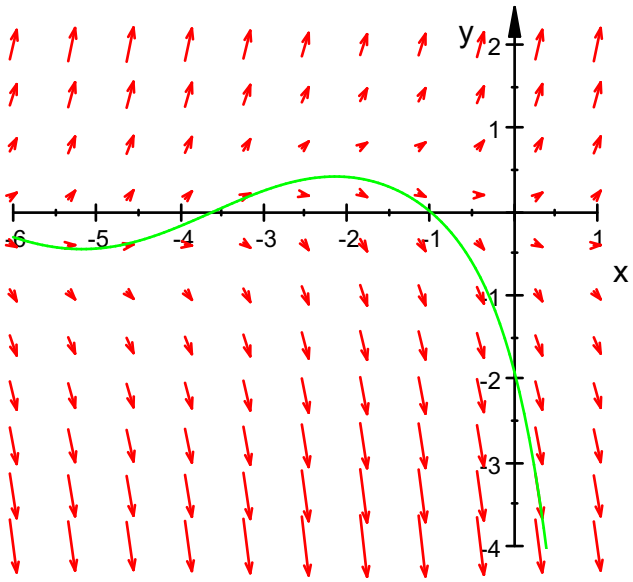
$$0.0=0$$

Zeichnen des Richtungsfeldes von DGLn 1. Ordnung, die man nach y' auflösen kann

```
g:=(x,y)->(2*y+sin(x)):g(x,y);//DGL eintragen!!!!!!!
```

$$2\cdot y+\sin(x)$$

```
xmin:=-6:xmax:=1:ymin:=-4:ymax:=2://Fenster eintragen !!!!!!!!!!!!
loesGraph:=plot::Function2d(loes(x),x=xmin..xmax,ViewingBoxYRange=ym
Color=RGB::Green):
DIGITS:=5:
field:= plot::VectorField2d( [1,g(x,y)], x=xmin..xmax,y=ymin..ymax,
   Color =  RGB::Red)://Die 1 musss sein!!!!!!
plot(field,loesGraph, Scaling = Constrained)
```



Numerische Lösung entsprechend der Vorlesung Ha

Heunverfahren

```
heun:=proc(x0,y0) local x00,y00,m0,mz,z,mm,x1,y1;
begin
            x00:=float(x0):y00:=float(y0):
            x1:=x00+h: m0:=g(x00,y00):z:=y00+m0*h:
            mz:=g(x1,z):mm:=(m0+mz)/2:y1:=y00+mm*h:
            return(x1,y1)
end_proc:
```

```
heunPrint:=proc(x0,y0,h) local x00,y00,m0,mz,z,mm,x1,y1;
begin
            x00:=float(x0):y00:=float(y0):
            x1:=x00+h: m0:=g(x00,y00):z:=y00+m0*h:
            mz:=g(x1,z):mm:=(m0+mz)/2:y1:=y00+mm*h:
            DIGITS:=8;
            [[x00,y00],h,m0,z,mz,mm,[x1,y1]];
end_proc:
```

```
h:=0.2:heun(x0Wert,x0Wert)// Schrittweite wählen
```

$$-0.8,\ -1.6695$$

```
heunPrint(x0Wert,y0Wert,h)
```

$$[[-1.0,\ 0.0],\ 0.2,\ -0.84147099,\ -0.1682942,\ -1.0539445,\ -0.94770774,\ [-$$

```
Hier stehen [x0,y0],h,m0,z,mz,mm,[x1,y1]
```

```
heun(heun(x0Wert,y0Wert))  //Ein nächster Schritt
```

$$-0.6,\ -0.43741559$$

```
heunPrint(heun(x0Wert,y0Wert),h)
```

```
[[– 0.8, – 0.18954155], 0.2, – 1.0964392, – 0.40882938, – 1.3823012, – 1.23
```

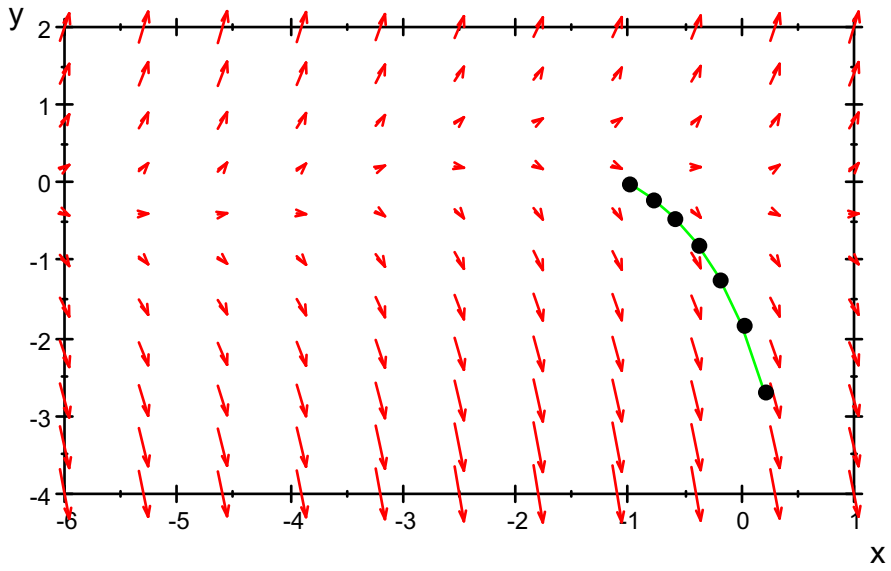
```
n:=6:liste:=(heun@@i)(x0Wert,y0Wert) $ i=1..n://Folge xi,yi
punkte:=[liste[j],liste[j+1]]$ j=1..2*n-1://Kombination zu Punkten
punkte:=punkte[2*j-1] $ j=1..n //Folge der Heunpunkte
```

```
[– 0.8, – 0.18954155], [– 0.6, – 0.43741559], [– 0.4, – 0.76536685], [– 0.2,
```

```
punkte:=[x0Wert,y0Wert],punkte;  //Davor der Start zugefügt
```

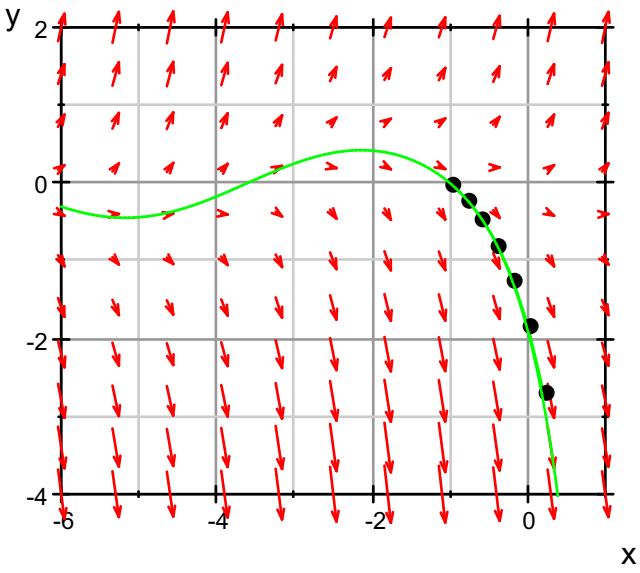
```
[– 1, 0], [– 0.8, – 0.18954155], [– 0.6, – 0.43741559], [– 0.4, – 0.76536685]
```

```
heunpkte:=plot::Listplot([punkte],PointSize=2,Color=RGB::Gre
plot(field,heunpkte)
```




```
plot(field,heunpkte,loesGraph,Axes=Origin,

TicksDistance = 2.0, GridVisible = TRUE,
     SubgridVisible = TRUE,Scaling=Constrained)
```



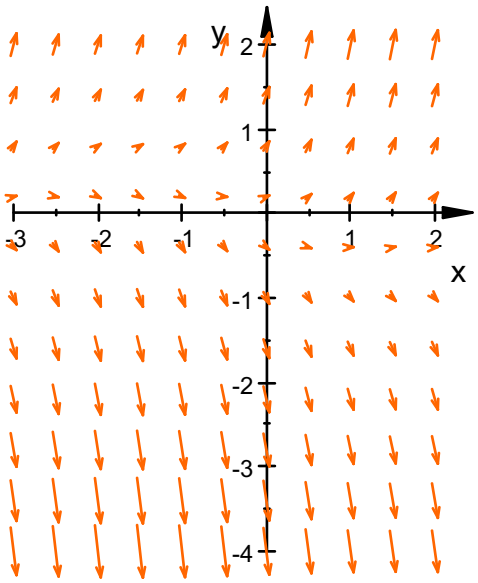
Die exakte Lösung stimmt mit der numerischen Lösung und dem Richtungsfeld gut überein.

Numerische Lösung mit MuPAD

Frage, welche Syntax odesolve hat und wie man DGLn zeichnet

```
h:=0.2: n:=6: //Wie oben
```

```
Feld := plot::VectorField2d([1, g(x, y)], x = -3..2, y = -4..2,
 Color = RGB::Orange):plot(Feld, Scaling=Constrained)
//Feld hat nur etwas andere Maße als field
```




```
x0Wert;y0Wert;//zur Erinnerung
```

$$-1$$

$$0$$

Hier muss man nochmal die DGL eintragen, denn in g(x,y) ist y nur als Variable.

Mit dem folgenden Befehl werden G, X0 und Y0 belegt.

```
[G,X0, Y0] := [numeric::ode2vectorfield(
      {y'(x) = 2*y(x)+sin(x) , y(x0Wert) =y0Wert}, [y(x)])]
```

$$[\text{proc G(t, Y) ... end}, -1, [0]]$$

```
X0
```

$$-1$$

Erzeugung der Werte mit numeric::odesolve

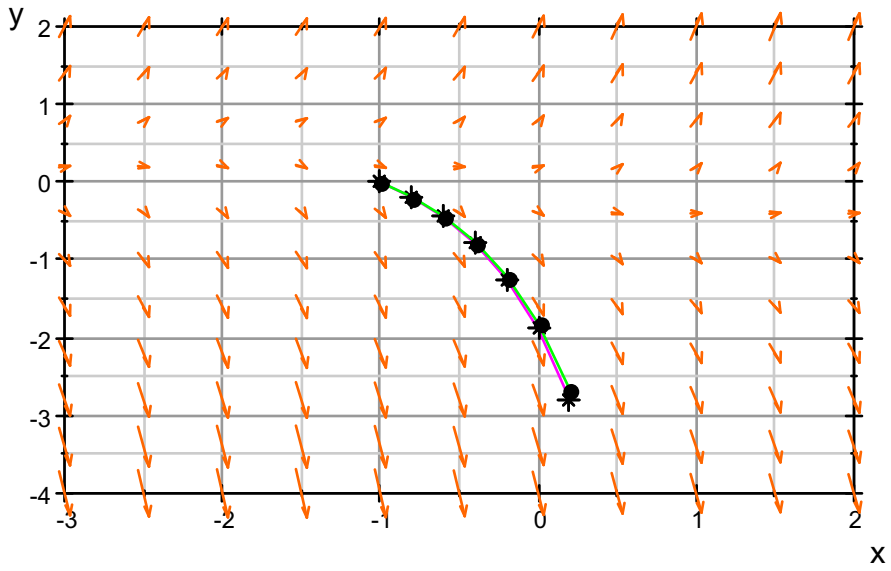
```
MuPkte:=[x0Wert+i*h,
      op(numeric::odesolve(
       G, X0..x0Wert+i*h, [0],Stepsize=h, RK4))]$i=1..n:
                Stepsize=h, RK4))]$i=1..n:
```

Wichtig ist, dass man mit RK4 das Rung-Kutta-Verfahren 4.Ordnung wählt. Alternative ist u.a. Euler1

```
MuPkte:=[x0Wert,y0Wert],MuPkte
```

$$[-1,\ 0],\ [-0.8,\ -0.1932944],\ [-0.6,\ -0.44773002],\ [-0.4,\ -0.78701779],$$

```
MuPkteGraph:=plot::Listplot([MuPkte],
        PointSize=3,PointStyle=Stars,Color=RGB::Magenta):
plot(Feld,MuPkteGraph,heunpkte, Axes=Origin, TicksDistance =
     SubgridVisible = TRUE):
```



Man sieht, dass die Runge-Kutta-Punkte und die Heun-Punkte fast aufeinander liegen.

```
g(x,y);x0Wert;y0Wert;h; //zur Erinnerung
```

$$2 \cdot y + \sin(x)$$

$$-1$$

$$0$$

$$0.2$$

```
[G,X0, Y0] ist oben schon erzeugt
```

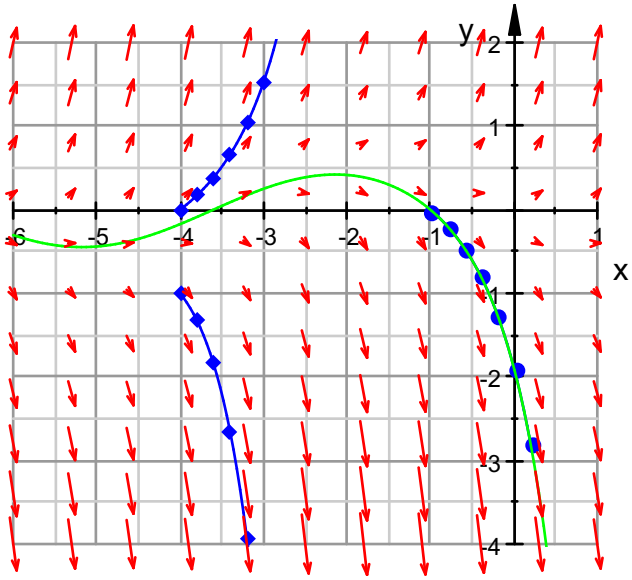
Hier wird nun die numerische Lösung direkt von Mupad gezeichnet.

```
p1 := plot::Ode2d(G, [-1+i*h $ i=0..6], Y0,RK4,Stepsize=h,
                  PointSize = 2*unit::mm,
                  PointStyle = FilledCircles):
```



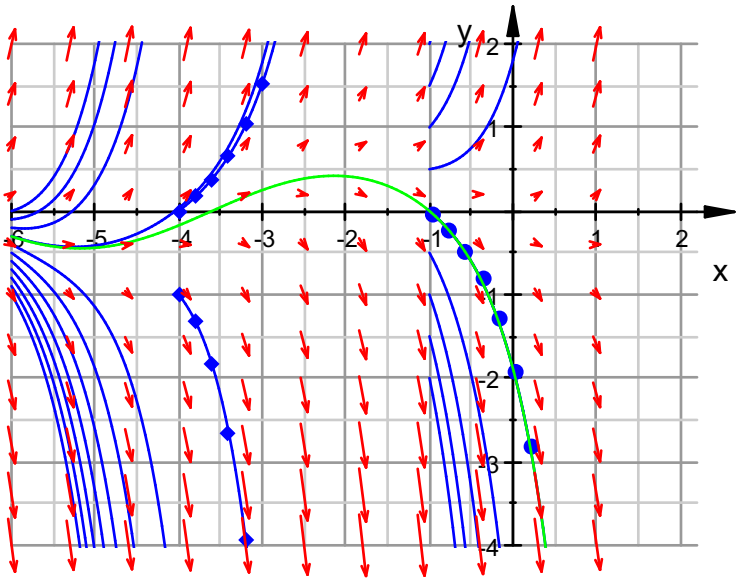
```
p2:= plot::Ode2d(G, [-4+i*h $ i=0..6], Y0,RK4,Stepsize=h,
```

```
                    PointSize = 2*unit::mm,
                    PointStyle = FilledDiamonds):
p3:= plot::Ode2d(G, [-4+i*h $ i=0..6], [-1],RK4,Stepsize=h,
                    PointSize = 2*unit::mm,
                    PointStyle = FilledDiamonds):
plot(p1,p2,p3,loesGraph,field ,TicksDistance = 1, GridVisibl
     SubgridVisible = TRUE,Scaling=Constrained):
```




```
all:=plot::Ode2d(G, [-6+i*h $ i=0..16], [-1+k*0.1],RK4,Steps
                    PointsVisible =FALSE)$ k=0..10:
all2:=plot::Ode2d(G, [-1+i*h $ i=0..16], [-2+k*0.5],RK4,Step
                    PointsVisible =FALSE)$ k=0..10:
```

```
plot(all,all2,p1,p2,p3,loesGraph,field ,TicksDistance = 1, G
     SubgridVisible = TRUE,Scaling=Constrained)
```



Isoklinen

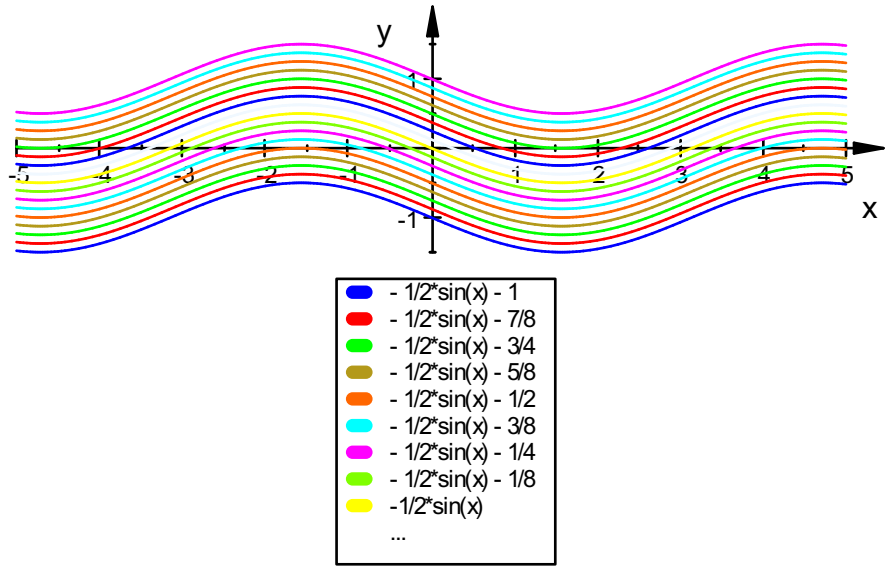
```
iso:=(x,m)->op(solve(m=g(x,y),y)):iso(x,m);
```

$$\frac{m}{2} - \frac{\sin(x)}{2}$$

```
alleIso:= iso(x,m/4) $ m=-8..8//Achtung, Bereich anpassen
```

$$-\frac{\sin(x)}{2} - 1,\ -\frac{\sin(x)}{2} - \frac{7}{8},\ -\frac{\sin(x)}{2} - \frac{3}{4},\ -\frac{\sin(x)}{2} - \frac{5}{8},\ -\frac{\sin(x)}{2} - \frac{1}{2},\ -\frac{si}{}$$

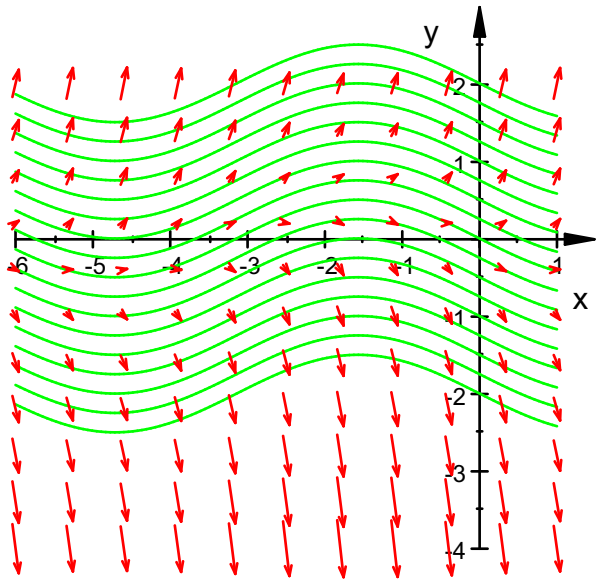
```
plotfunc2d(alleIso)
```



Man sieht hier deutlich, dass nur in einem schmalen Bereich um die x-Achse herum flache
Steigungen vorkommen können. In diesem Bereich entscheidet sich durch kleinste Änderungen

in den Anfangswerten, ob die Lösungsfunktion nach oben oder nach unten geht.

```
alleIso:=plot::Function2d(iso(x,m/2),x=-6..xmax,
Color=RGB::Green ) $ m=-8..8:
plot(alleIso,field,Scaling = Constrained)
```



In diesem Bereich entscheidet sich durch kleinste Änderungen
in den Anfangswerten, ob die Lösungsfunktion nach oben oder nach unten geht.