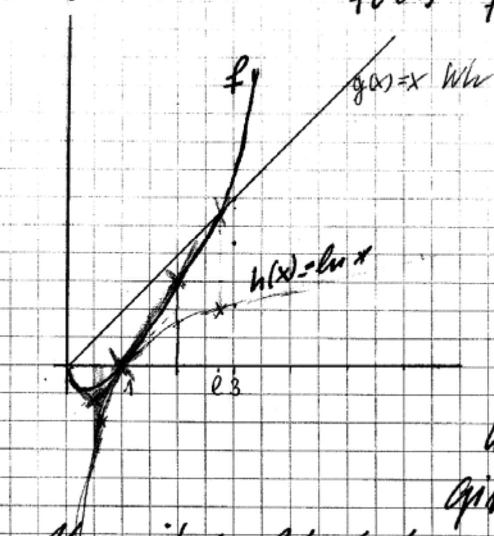
Staatsex. Mrz 07
Aufg 1 Analysis

$f_a(x) = (x-a)\ln(x)$

$f_0(x) = f(x) = x\ln(x)$



Definitionsbereich $D=\mathbb{R}^+$

Nullstelle ist die ln-Nullstelle

$x_0 = 1$, denn $f(1) = e\cdot\ln 1 = e\cdot 0 = 0$

Schnittstelle von f und g ist

$x_s = e$, denn $f(e) = e\cdot\ln e = e\cdot 1 = e$

Wegen $\ln x < x$ gilt

$f(x) = x\ln x < x^2$

Wegen $1 \le \ln x$ für $x \ge e$

gilt $x \le x\ln x = f(x)$ für $x \ge e$

Also ist das Wachstum von $x\ln x$ schwächer als das der Normalparabel aber stärker als das der Winkelhalbierenden.

Verhalten für $x \to 0$. Da $0\cdot(-\infty)$ ein unbestimmter Ausdruck ist, wird die Regel von de l'Hospital angewendet

$$\lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{l'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

erfüllt $\frac{\infty}{\infty}$

Also kann man f rechtsseitig stetig nach (0|0) fortsetzen $f(x) = \begin{cases} x\ln x & \text{für } x>0 \\ 0 & \text{für } x=0 \end{cases}$

Betrachtung der Ableitung:

$f'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 \xrightarrow{x\to 0} -\infty$

f' divergiert bestimmt gegen $-\infty$, d.h. f läuft von unten senkrecht in den Ursprung.

Aufgabe 1

b) $Q(q, f(q)) = Q(q, q\ln q)$

Tangentengleichung $t(x) = f'(q)(x-q) + q\ln q$

$f'(q) = \ln q + 1 \Rightarrow t(x) = (\ln q + 1)(x-q) + q\ln q$ $= (\ln q + 1)x - q$

Berechnung der obersten (grünen) Fläche zwischen der Ursprungsgeraden durch Q und f

$u(x) = \frac{f(q)}{q} \cdot x = \frac{q\ln q}{q} \cdot x = \ln q \cdot x$

$F_1 = \int_0^q (\ln q \cdot x - \underline{x\ln x})\,dx = *$

Extra: $\int \underset{u'}{x}\,\underset{v}{\ln x}\,dx = \underset{u}{\tfrac{1}{2}x^2} \cdot \underset{v}{\ln x} - \int \underset{u v'}{\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \tfrac{1}{x}}\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1)}}$

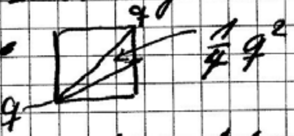
$* = \left[\frac{1}{2}\ln q \cdot x^2 - \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1)\right]_0^q$

$= \frac{1}{2}\ln q \cdot q^2 - \frac{1}{4}q^2(2\ln q - 1)$

$- 0 - 0$

zu bedenken: $x^2\ln x = x \cdot (x \cdot \ln x) \xrightarrow[\text{s.ob.}]{x \to 0} 0 \cdot 0 = 0$

$= +\frac{1}{4}q^2$ Das passt zur Einzeichnung der zweiten grünen Fläche



Dabei muss noch gezeigt werden, dass die Tangente bei $y = -q$ die y-Achse schneidet.

$t(0) = (\ln q + 1)(-q) + q\ln q = -q$, das stimmt also.

F_2 = obere blaue Fläche zw. f und Tangente

$F_2 = \int_0^q (-t(x) + f(x)) \underset{T1}{=} \frac{1}{4}q^2$ also $F_1 = F_2$

und es passt ebenfalls zur unteren blauen Fl.

Aufgabe 1

c) Ableitungen $f'(x) = \ln x + 1$ $\underset{\text{s.o.}}{\uparrow}$ $f''(x) = \frac{1}{x}$

$f_a(x) = (x-a)\ln x$ $f_a'(x) = (x-a)\cdot\frac{1}{x} + 1\cdot\ln x = \underline{\underline{\ln x + 1 - \frac{a}{x}}}$

$f_a''(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}$ Notw. Bed. für WP ist $f''(x) = 0$

$\frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$ $| \cdot x^2$, $x > 0$, da bei $x=0$ Pol und inneres von D

$x + a = 0$

$x = -a$ für $a > 0$ ist dieses nicht im D. Die Schar sollte nur für $a \geq 0$ betrachtet werden.

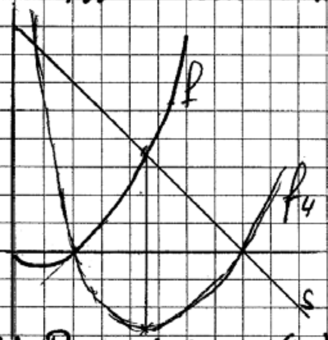
Also hat keine Kurve der Schar einen WP.

d) Eine Extremstelle wird aus c) erwartet

$f_a'(x) = 0$ $\ln x + 1 - \frac{a}{x} = 0$ transzendent

aber $\underset{x \neq 0}{\Leftrightarrow}$ $x\ln x + x - a = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x\ln x}_{f(x)} = \underbrace{a - x}_{s(x)}$

Man sieht: Die (erwartete) Nullstelle von f' löst auch das Schnittproblem.



Numerische Bestimmung

solve$(x \ln x = 4 - x, x) \longrightarrow 2{,}22341 =: x_s$

Ordinate $4 - x_s = 1{,}77659$

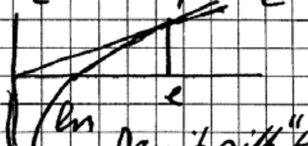
Ordinate Extr. $(x_s - 4)\ln x_s = -1{,}41957$

Extremum $(2{,}22 \mid -1{,}42)$

f) Parabel $p(x) = kx^2$ Bedingung $p(e) = f(e)$

i) $ke^2 = e\ln e \Leftrightarrow ke = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{e}$ also $p(x) = \frac{1}{e}x^2$

$x\ln x \leq \frac{1}{e}x^2 \underset{x>0}{\Longleftrightarrow} \ln x \leq \frac{1}{e}x$



Beh. $y = \frac{1}{e}x$ ist Tangente an ln in $x = e$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ Steigung in $x = e$ ist $\frac{1}{e}$. Damit gilt "$\leq$"

ii) $F_p = \int_0^e (p(x) - f(x))\,dx \underset{TI}{=} \frac{e^2}{12}$ $F_1 = \frac{1}{4}q^2 \underset{q=e}{=} \frac{1}{4}e^2$

Also ist $\frac{F_p}{F_1} = 1:3$ F_p ist $\frac{1}{3}$ so groß wie F_1