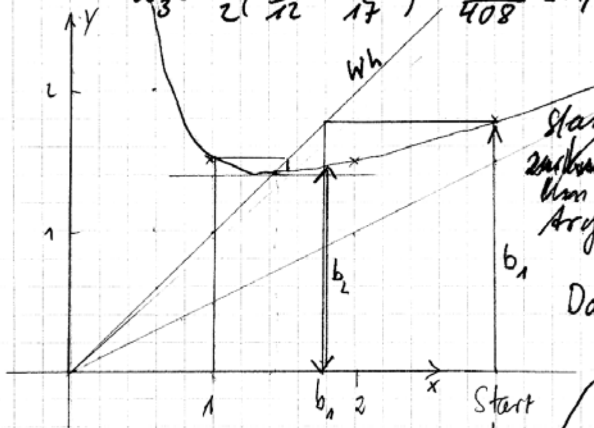
Staatsexamen GHR 2007 März
Analysis Aufg. 1 Rekursion, Heron

$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{r}{x}\right)$ 1) Zugeh. rek. Formel $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{r}{a_n}\right)$ (nur dez. verlangt.)

$r = 2 \quad a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2 \cdot 2}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9+8}{6} = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}$

$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2 \cdot 12}{17}\right) = \frac{577}{408} = 1{,}414215686$



2) Start, zur Kurve $\Rightarrow b_1$ als Ordinate
Um b_1 einzusetzen als Argument, muss man b_1 an der Wh spiegeln
Dann wieder zur Kurve usw

3) Fixpunkt $f(x) = x$ also

$\frac{1}{2}\left(x + \frac{r}{x}\right) = x$

$x + \frac{r}{x} = 2x$

$\frac{r}{x} = x$

$r = x^2$

$\pm\sqrt{r} = x$ positive Lös. $\sqrt{r}$

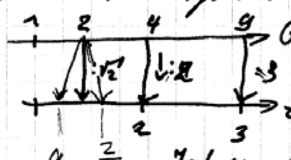
$x_F = \sqrt{r}$ ist der (pos.) Fixpunkt.

Die Konvergenz untersucht man an der 1. Ableitung

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{r}{2x^2}$, Fixpkt einsetzen $f'(x_F) = \frac{1}{2} - \frac{r}{2r} = 0$

Der Fixpkt $x_F = \sqrt{r}$ ist für alle r <u>superschnell anziehend</u>

4) ~~Zwei~~ Arten nur eine verlangt. I



Unter 2 liegt $\sqrt{2}$

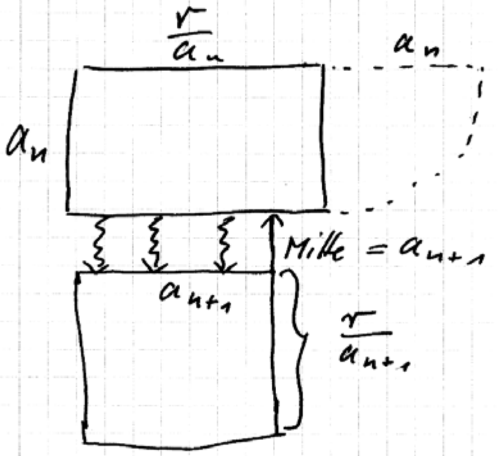
daher ist es sinnvoll, den Mittelwert $\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{r}{a_n}\right)$ als besseren Wert zu wählen

$a_n \; \frac{2}{a_n}$ Ist a_n zu klein $\Rightarrow \frac{2}{a_n}$ zu groß

oder $\frac{2}{a_n} \; a_n$ " a_n zu groß $\Rightarrow \frac{2}{a_n}$ zu klein

II $\sqrt{r}$ bestimmen heißt, die Kantenlänge eines Quadrates mit Fläche r zu bestimmen

II Ist a_n eine Kante, dann entsteht mit $\frac{r}{a_n}$ eine passende 2. Kante, sind die beiden Werte nicht gleich, bildet man den MW. $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{r}{a_n}\right)$



5) Höhere Wurzeln

$h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{r}{x^{k-1}}\right)$

Fixpkt. $x = h(x)$

$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{r}{x^{k-1}}\right)$

$2x = x + \frac{r}{x^{k-1}}$

$x^k = r \Rightarrow x = \sqrt[k]{r}$

6) $g(x) = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{r}{x^{k-1}}\right)$

Fixpkt $x = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{r}{x^{k-1}}\right)$

$kx = (k-1)x + \frac{r}{x^{k-1}}$

$x = \frac{r}{x^{k-1}}$

$x^k = r$

$\sqrt[k]{r} = x$

Beweis nicht verlangt

Die Konvergenz ist „superschnell", wenn man pro Schritt die Anzahl der richtigen Stellen verdoppelt.

das kann man an dem unteren Zahlenblock sehen.

7) Mit der h-Formel ist die Konvergenz deutlich langsamer, in je 2 Schritten wird eine 0 mit Richtung auf das Ergebnis 2,000... dazugewonnen.

Dagegen verdoppelt das g-Verfahren die Zahl der gewonnenen 0 bei jedem Schritt.

h-Formel $h'(x) = \frac{1}{2} - (k-1)\frac{r}{x^k}$ Ableitung der Trägerfkt.

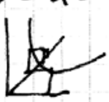
$h'(x_F) = \frac{1}{2} - \left(\frac{k-1}{2}\right)\frac{r}{r} = 1 - \frac{k}{2}$

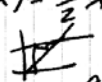
Konvergenz liegt vor für $\left|1 - \frac{k}{2}\right| < 1$

Berechnung der Grenzen $-1 < 1 - \frac{k}{2} \wedge 1 - \frac{k}{2} < 1$

Konvergenz ist gesichert $k < 4 \wedge 0 < k$

für $0 < k < 4$; Ränder $k = 0 \Rightarrow h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{r}{2}$ $x > 0$

$k = 4$  so nicht zu sehen
unklarer Fall

 Konvergenz gegen $x = r$