Kurvendiskussion

$f(x) = \frac{1}{16} x(x-6)^2$

Nullstellen von f: $f(x)=0$

$\underbrace{x}_{\text{einfache Nst.}} \underbrace{(x-6)^2}_{\text{doppelte Nst.}} = 0$

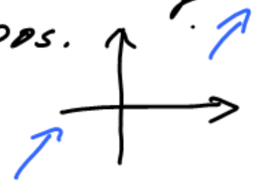
einfache Nst. $x=0$ (2)

doppelte Nst. $x=6$

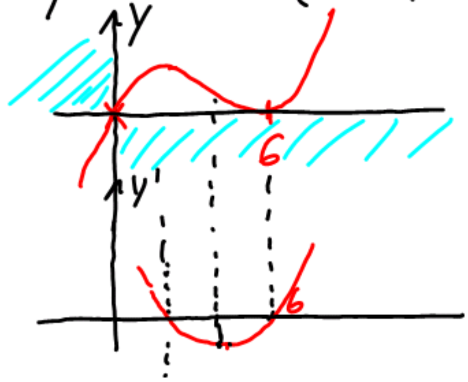
Berührung der x-Achse ohne VZ-Wechsel (3)

Gesamtverlauf (1)

x^3, pos.



qualitativ (aus (1),(2),(3))



Zusammen ergibt sich:

Minimum in Min=(6/0)

Maximum und Wendepkt existieren

$0 < x_e < x_w < 6$, klar ist $x_w = \frac{x_e+6}{2}$

Berechnung: $f(x) = x(x-6)^2 = x^3 - 12x^2 + 6x$

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$

Extremstellen lösen $f'(x)=0$, also

$3x^2 - 24x + 36 = 0$

$x^2 - 8x = -12$

$x^2 - 8x + 4^2 = -12 + 16$

$(x-4)^2 = 4$

$x = 4 \pm 2$

$x = 2 \lor x = 6$

$f(2) = \frac{1}{16} \cdot 2 \cdot (2-6)^2 = \frac{1}{16} \cdot 2 \cdot 16 = 2$

Also Max=(2/2) ; Min=(6/2) war klar

* Da f' eine Parabel ist, liegt der Scheitel in der Mitte zwischen zwei Nullstellen: $x_w = \frac{2+6}{2} = 4$

→ Wegen der Symmetrie der Polynome 3. Grades zum WP gilt: $y_w = \frac{y_{min} + y_{max}}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$

Alternativ ab *

$f''(x) = 6x - 24$

Wendestellen lösen $f''(x) = 0$

Also: $6x - 24 = 0$

$6x = 24$

$x = 4$ → $f(4) = \frac{1}{16} \cdot 4(4-6)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$

Wendepunkt WP=(4/1)