Eulerkasten

Eulerkasten www.mathematik−verstehen.de Haftendorn 2011 $\mathbf{f}(x):=(\mathbf{e}^x-k)^2$ ▸ *Fertig*

Beim Aufbau eines Graphen aus der inneren Funktion $\mathbf{fi}(x):=\mathbf{e}^x-k$ ▸ *Fertig* und deren Quadrierung kann man schon etliche Eigenschaften sicher begründen: Die Asymptote ist $y=k^2$, der Graph nähert sich ihr für negative x von unten. Es gibt stets genau eine Nullstelle und zwar bei $\mathbf{xo}:=\ln(k)$ ▸ $\ln(k)$ und diese ist Berührnullstelle und das einzige Extremum. Es gibt sicher genau einen Wendepunkt links von dieser Nullstelle.

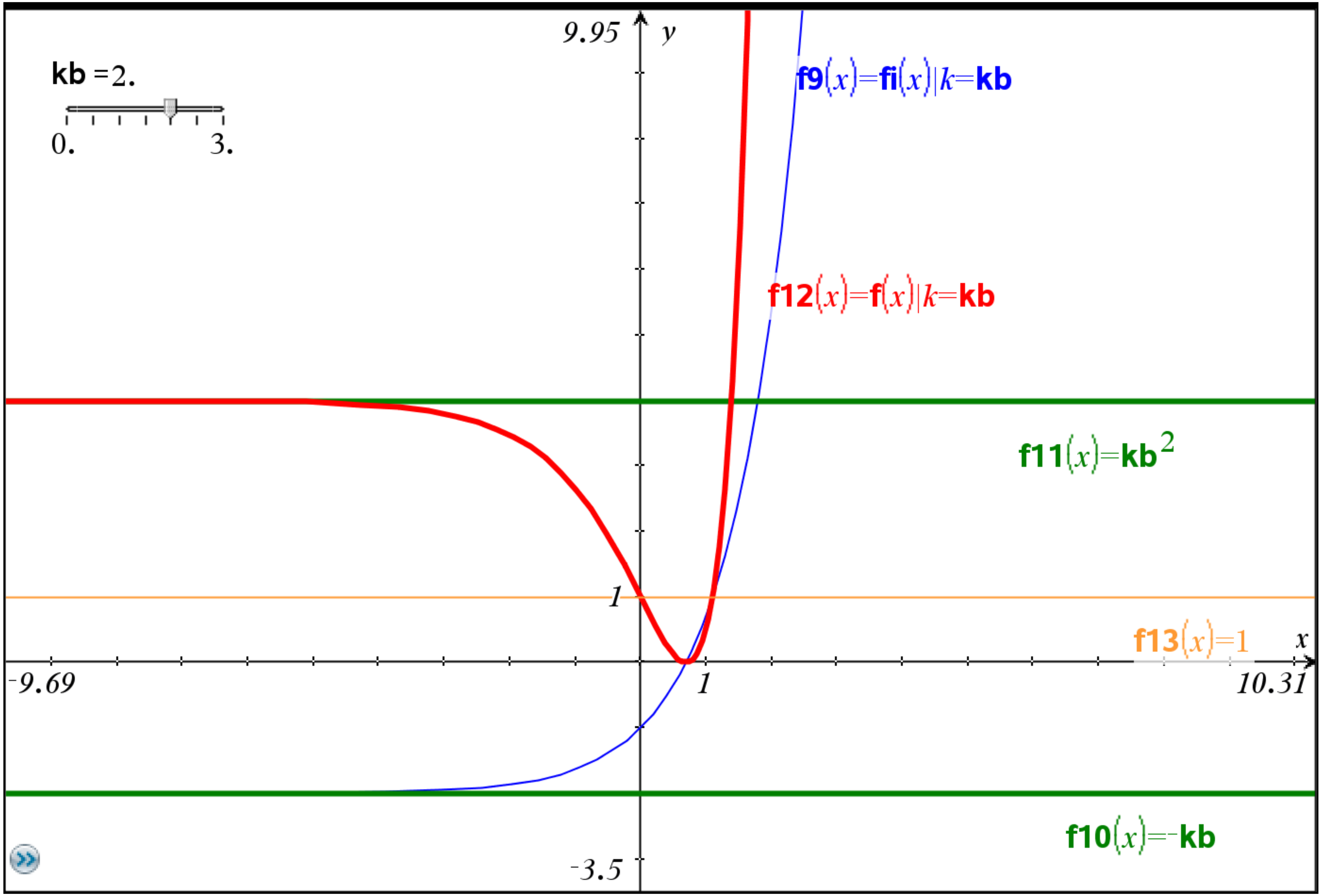
Bestimmung des <u>Wendepunktes</u>

$\mathbf{fs}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Fertig* $\mathbf{fs}(x)$ ▸ $2\cdot\mathbf{e}^x\cdot(\mathbf{e}^x-k)$ $\mathbf{xe}:=\ln(k)$ ▸ $\ln(k)$

$\mathbf{fss}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{fs}(x))$ ▸ *Fertig* $\frac{d}{dx}(\mathbf{fs}(x))$ ▸ $2\cdot\mathbf{e}^x\cdot(2\cdot\mathbf{e}^x-k)$ $\mathbf{xw}:=\ln(k)-\ln(2)$ ▸ $\ln\left(\frac{k}{2}\right)$

Ordinate des Wendepunktes $\mathbf{f}(\mathbf{xw})$ ▸ $\frac{k^2}{4}$ ⚠ Also liegt die Wendestelle stets $\ln(2)$ links von der Extremstelle und die Ordinate des Wendepunktes ist stets ein Viertel der Höhe der Asymptote.

1.1


kb =2.
0.
3.
9.95
y
f9(x)=fi(x)|k=kb
f12(x)=f(x)|k=kb
f11(x)=kb^2
1
f13(x)=1
x
-9.69
1
10.31
f10(x)=-kb
-3.5

1.2

Wendepunkt $w=[\mathbf{xw}\ \ \mathbf{f}(\mathbf{xw})] \blacktriangleright w=\left[\ln\left(\frac{k}{2}\right)\ \ \frac{k^2}{4}\right]$ ⚠ Wendesteigung $\mathbf{fs}(\mathbf{xw}) \blacktriangleright \frac{-k^2}{2}$ ⚠

Wendetangente $\mathbf{g}(x):=\mathbf{fs}(\mathbf{xw})\cdot(x-\mathbf{xw})+\mathbf{f}(\mathbf{xw}) \blacktriangleright$ *Fertig* $\mathbf{g}(x) \blacktriangleright \frac{-k^2\cdot(2\cdot x-2\cdot\ln(k)+2\cdot\ln(2)-1)}{4}$ ⚠

$\text{expand}(\mathbf{g}(x)) \blacktriangleright \frac{-k^2\cdot x}{2}+\frac{k^2\cdot\ln(k)}{2}-\frac{k^2\cdot\ln(2)}{2}+\frac{k^2}{4}$ ⚠

Schnitt mit x−Achse

$\mathbf{tx}:=\text{zeros}(\mathbf{g}(x),x) \blacktriangleright \left\{\frac{2\cdot\ln(k)-2\cdot\ln(2)+1}{2}\right\}$ ⚠

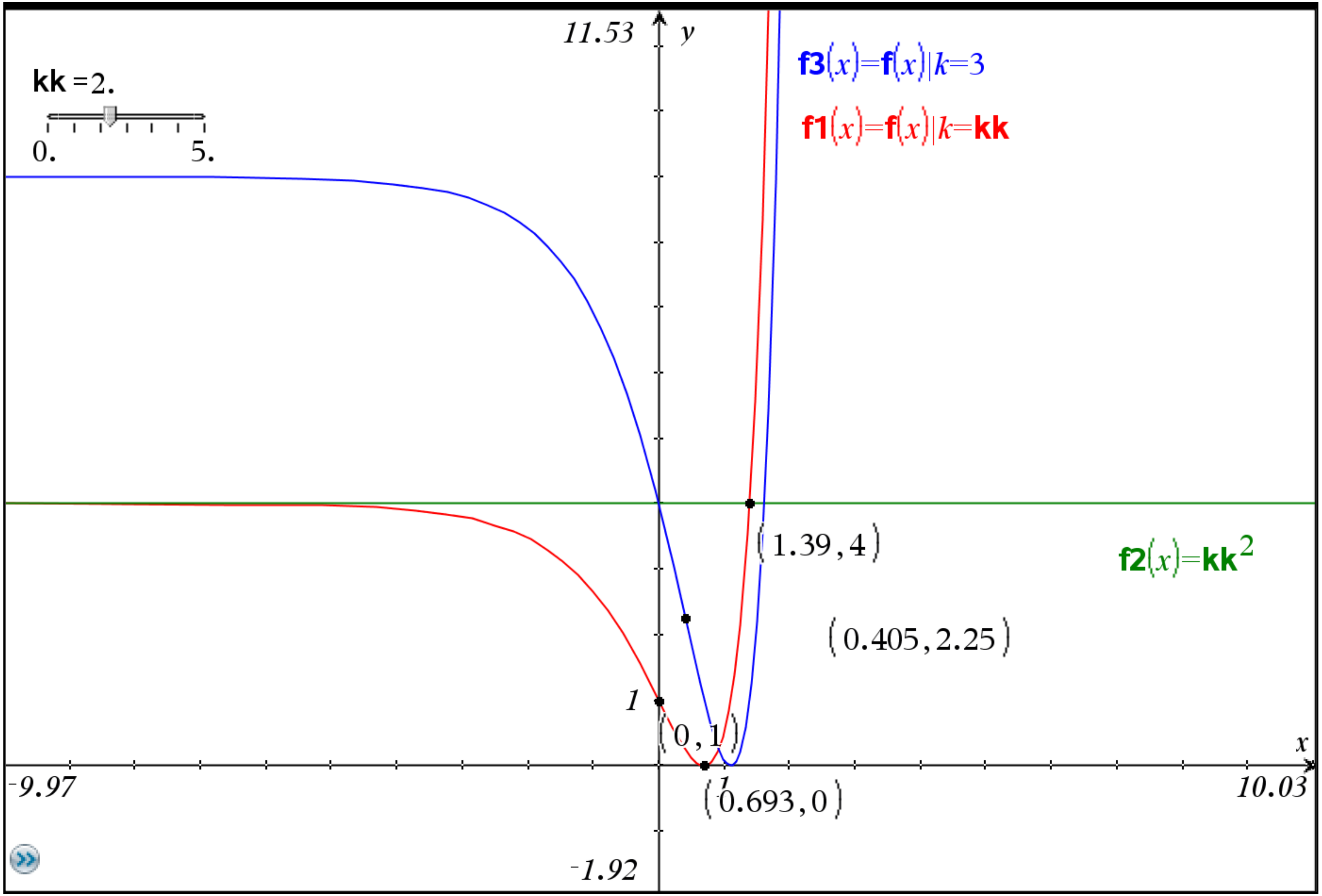
Schnitt mit Asymptote

$\mathbf{ta}:=\text{zeros}(\mathbf{g}(x)-k^2,x) \blacktriangleright \left\{\frac{2\cdot\ln(k)-2\cdot\ln(2)-3}{2}\right\}$ ⚠ Abstand $\mathbf{tx}-\mathbf{ta} \blacktriangleright \{2\}$ ⚠

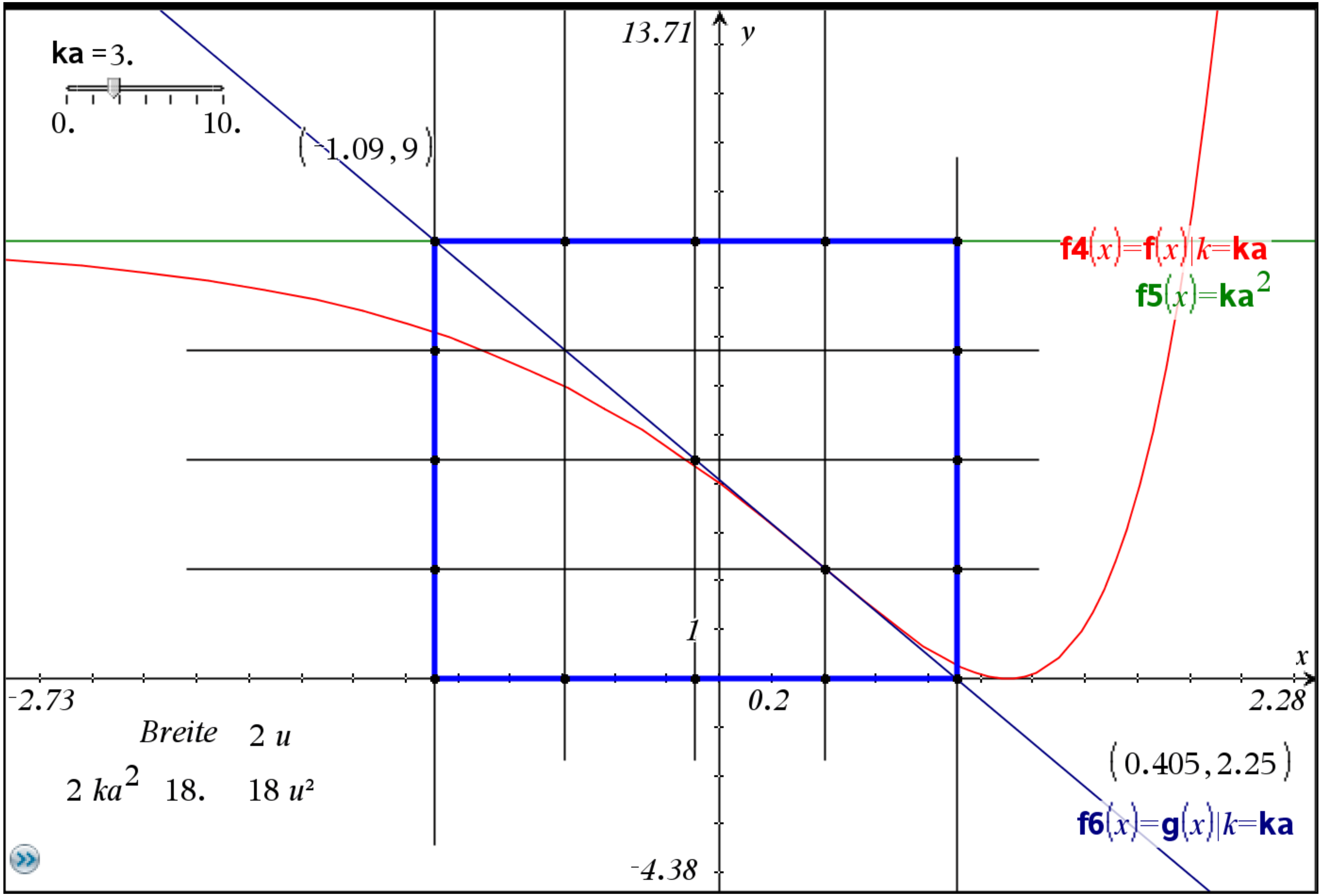
Erstaunlicherweise ist dieser Abstand unabhängigvon k stets 2.

Damit ist der "Kasten" stets 2 Einheiten breit und k^2 hoch, Fläche also $2k^2$

1.3


kk = 2.
0.
5.
11.53
y
f3(x)=f(x)|k=3
f1(x)=f(x)|k=kk
(1.39, 4)
f2(x)=kk^2
(0.405, 2.25)
1
(0, 1)
x
-9.97
1
(0.693, 0)
10.03
-1.92

1.4


ka = 3.
0.
10.
(-1.09, 9)
13.71
y
f4(x)=f(x)|k=ka
f5(x)=ka^2
1
x
-2.73
0.2
2.28
Breite 2 u
2 ka^2 18. 18 u²
(0.405, 2.25)
f6(x)=g(x)|k=ka
-4.38

1.5

Besonderheit bei der gegenseitigen Lage von Null– Schnitt– und Wendestelle

xo ▸ $\ln(k)$ Nullstelle, sie ist gleichzeitig stets Minimumstelle.

xw ▸ $\ln\left(\frac{k}{2}\right)$ Wendestelle, wegen $\ln(k)-\ln(2)$ ▸ $\ln\left(\frac{k}{2}\right)$ ist dies um den festen Wert $\ln(2)$ links der Nullstelle. Die Schnittstelle $\mathrm{solve}(\mathbf{f}(x)=k^2,x)$ ▸ $x=\ln(2\cdot k)$ and $k>0$

xs$:=\ln(k)+\ln(2)$ ▸ $\ln(2\cdot k)$ ist um $\ln(2)$ rechts von der Nullstelle.

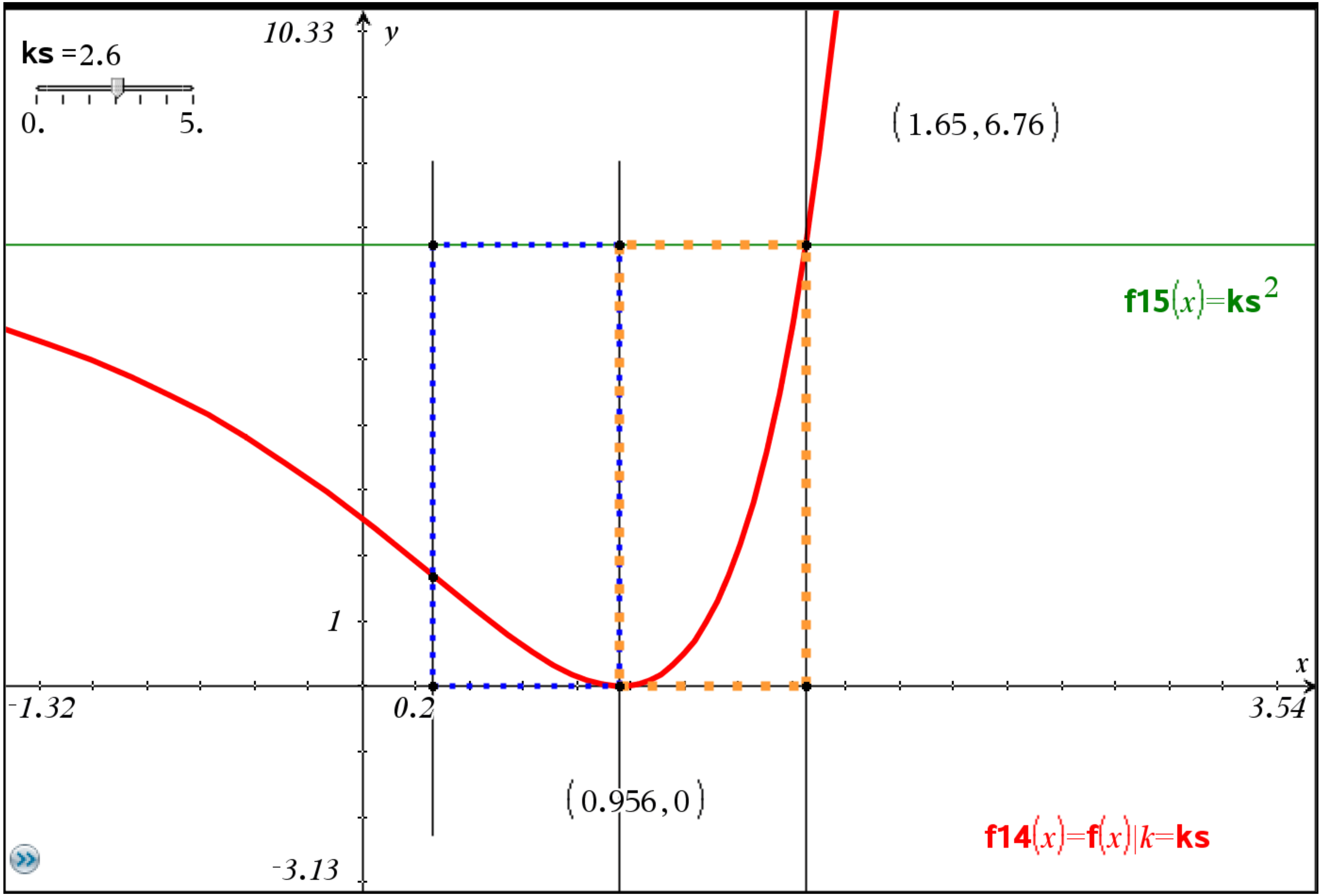
Wenn also mit wachsendem k der Graph der Kurve nach rechts rückt, bleibt der Doppelstreifen, den diese drei Stellen erzeugen, stets gleich breit.

Uneigentliches Integral, Zwischen Asymptote und Kurve ist die Kastenfläche $2k^2$

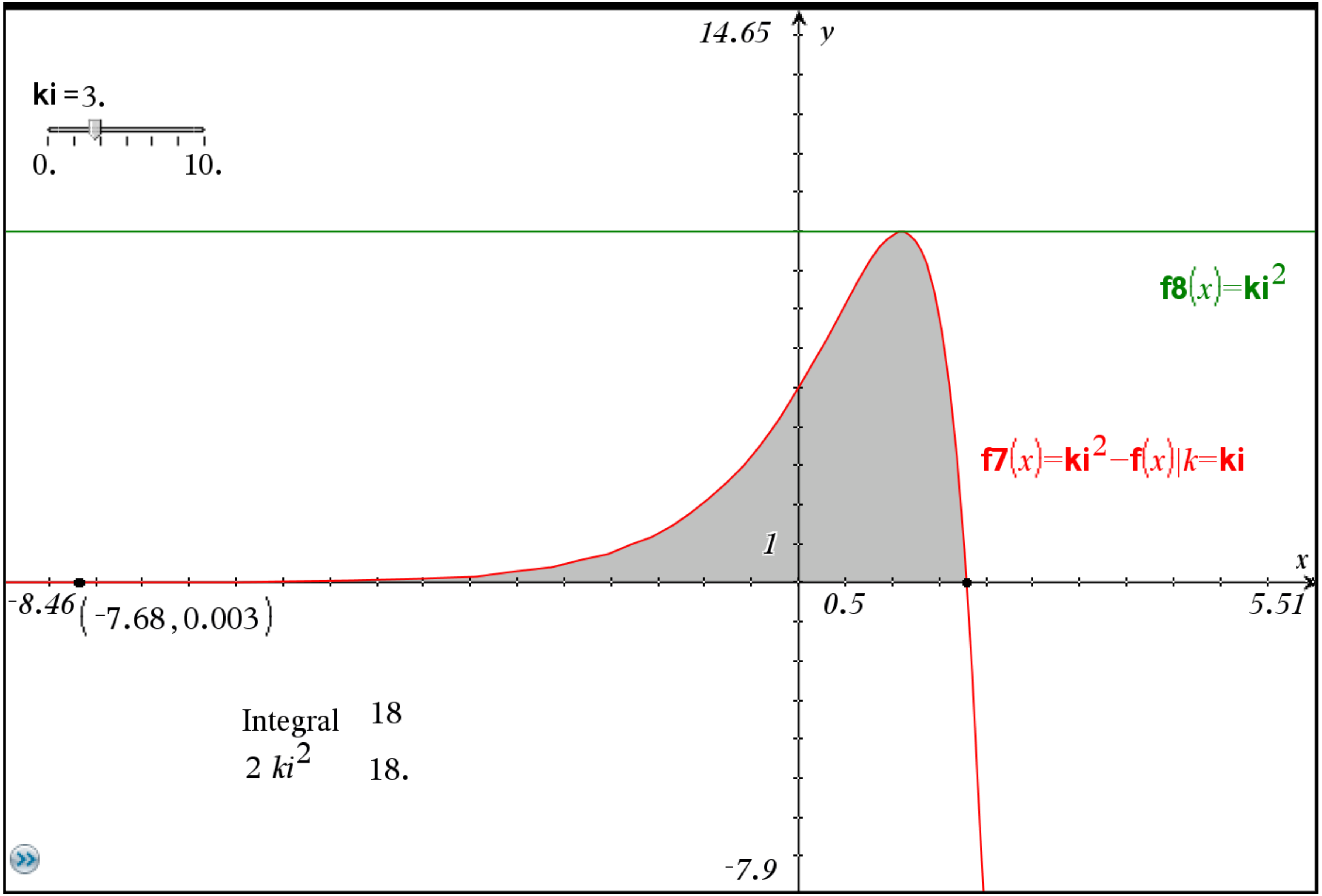
$\int_{-\infty}^{\mathbf{xs}} \left(k^2-\mathbf{f}(x)\right)dx$ ▸ $2\cdot k^2$ In einzelnen Schritten $\mathrm{expand}\left(k^2-\mathbf{f}(x)\right)$ ▸ $2\cdot k\cdot \mathbf{e}^x-\left(\mathbf{e}^x\right)^2$

$\int \left(\left(\mathbf{e}^x\right)^2-2\cdot k\cdot \mathbf{e}^x\right)dx$ ▸ $\frac{\mathbf{e}^{2\cdot x}}{2}-2\cdot k\cdot \mathbf{e}^x$, $\int_{c}^{\mathbf{xs}} \left(k^2-\mathbf{f}(x)\right)dx$ ▸ $\frac{\mathbf{e}^{2\cdot c}}{2}-2\cdot \mathbf{e}^c\cdot k+2\cdot k^2$

1.6


ks =2.6
0.
5.
10.33
y
(1.65, 6.76)
f15(x)=ks^2
1
x
-1.32
0.2
3.54
(0.956, 0)
-3.13
f14(x)=f(x)|k=ks

1.7


ki =3.
0.
10.
14.65
y
f8(x)=ki^2
f7(x)=ki^2−f(x)|k=ki
1
x
-8.46
(-7.68, 0.003)
0.5
5.51
Integral 18
2 ki^2 18.
-7.9

1.8