TCP 107 bis 110

Aufgaben zur Analysis aus TCP 2001 Paetec-Verlag   Haftendorn 2011
3898181014 Aufgabenbuch Intergal-Kapitel EA 78-80 und EA 95-121
Hier sind in verschiedenen Problemen die interessanteren Aufgaben versammelt.
In dieser Datei sind die Aufgaben EA 107 bis EA 110 gelöst.

EA 107 Gegeben seien die Funktionen f_m und g mit $f_m = mx + 4$ $(m \in \mathbb{R})$ und $g(x) = \frac{4}{x^2}$ $(x \neq 0)$.

GTA Nicht von Hand lösbar

EA 108 Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$. **GTA**

Von Hand lösbar, GTA aber sinnvoll, noch besser wäre eine Ergänzung mit CAS

EA 109 Gegeben sind die Funktionenscharen f_t und g_t mit $f_t(x) = -\frac{1}{t^2}x^2 + 1$ und $g_t(x) = -\frac{1}{t}x^2 + t$ $(0 < t < 1)$.

geht von Hand, aber schön visualisiert. Anspruchsvoll aber gut machbar.

EA 110 Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ und $g(x) = -4x + 5$.

langweilig

1.1

EA 107 Gebr. Rat und Gerade

EA 107 Gegeben seien die Funktionen f_m und g mit $f_m = mx + 4$ $(m \in \mathbb{R})$ und $g(x) = \frac{4}{x^2}$ $(x \neq 0)$.
a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_1; f_2; $f_{-\frac{1}{2}}$ und g in ein Koordinatensystem!
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion g im Intervall [1; 4]!
c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion g im Intervall [1; b]!
d) Die Graphen der Funktionen f_1 und g schließen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie deren Inhalt!

$f(x):=m\cdot x+4$ ▸ *Fertig* $g(x):=\frac{4}{x^2}$ ▸ *Fertig*   a) Siehe erste Grafikseite

Was die verschiedenen Geraden sollen, wird mir micht klar.

Berechnung der Integrale: b) $\int g(x)\,dx$ ▸ $\frac{-4}{x}$ $\int_1^4 g(x)\,dx$ ▸ 3

c) $\int_1^b g(x)\,dx$ ▸ $\frac{4\cdot(b-1)}{b}$ Ich hätte nun die Frage $\int_1^\infty g(x)\,dx$ ▸ 4 gestellt.

Achtung: die Schieberegler bei den einzelnen Graph-Fenstern müssen alle verschieden heißen, sonst kann mann nicht unabhängig voneinander erkunden.

2.1

EA 107 Gebr. Rat und Gerade

d) Berechnung der Zwischenfläche

Zunächst Berechnung der Schnittpunkte, als Nullstellen von $(f(x)|m=1)-g(x)$ ▸ $x-\frac{4}{x^2}+4$

(Achtung die Klammer bei f muss!!!! sein)
$st:=\text{zeros}((f(x)|m=1)-g(x),x)$ ▸ $\{-3.70928,-1.19394,0.903212\}$
$g(st)$ ▸ $\{0.290725,2.80606,4.90321\}$ Diese Art mit der Funktion zeros erlaubt die direkte Berechnung der Ordinaten der Schnittpunkte "in einem Rutsch" und das Herausgreifen der Ergebnisse mit $st[1]$ ▸ -3.70928 $st[2]$ ▸ -1.19394

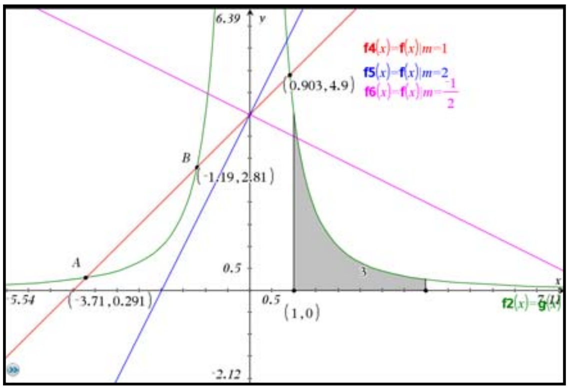
Achtung: dieses Problem führt auf die Gleichung, $x^3-4+4x^2=0$, die nur mit numerischem Werkzeug zu lösen ist. Im Buch TCPsteht GTR, natürlich geht auch CAS. (siehe "cardanische Gleichung", www.mathematik-verstehen.de)

$\int((f(x)|m=1)-g(x))dx$ ▸ $\frac{x^2}{2}+4\cdot x+\frac{4}{x}$ $\int_{st[1]}^{st[2]}((f(x)|m=1)-g(x))dx$ ▸ 1.62285

Fazit: da sowieso numerisch gearbeitet werden muss, ist zu empfehlen, die Aufgabe ausschließlich in Graph-Fenster zu lösen. (2.Graph-Fernster)

2.2

EA 107 Gebr. Rat und Gerade



2.3

EA 107 Gebr. Rat und Gerade

Aufgabenergänzungen:

Ermittel Sie interaktiv möglichst genau, für welche m sich endlich begrenzte Flächen zwischen f und g ergeben?

Ansatz $h(x):=f(x)-g(x)$ $h(x)$

$\text{approx}(\text{zeros}(h(x),x))|m=1.5396$

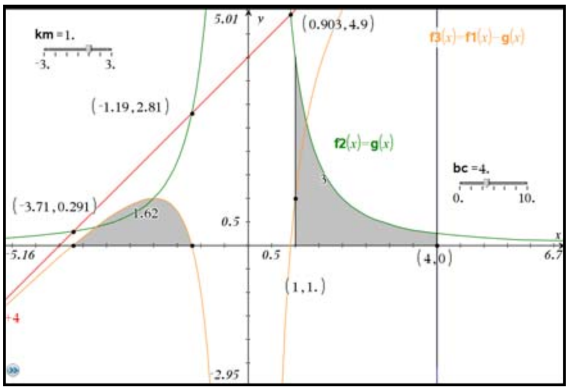
Mit dieser Rechnung konnte man sich herantasten an eine möglichst große Übergeinstimmung der ersten beiden Werte.

$\text{approx}(\text{zeros}(h(x),x))|m=1.5397$ Hier ist nur noch die rechte Schnittstelle übrig.

Der so gefundene Werte m=1.5396 ist genauer als der, den man durch Ziehen an dem Schieberegler erhalten kann.

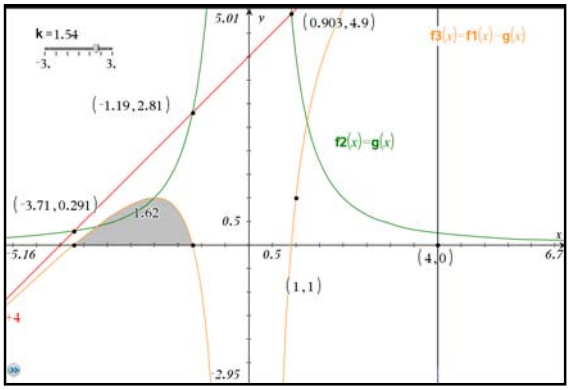
2.4

EA 107 Gebr. Rat und Gerade



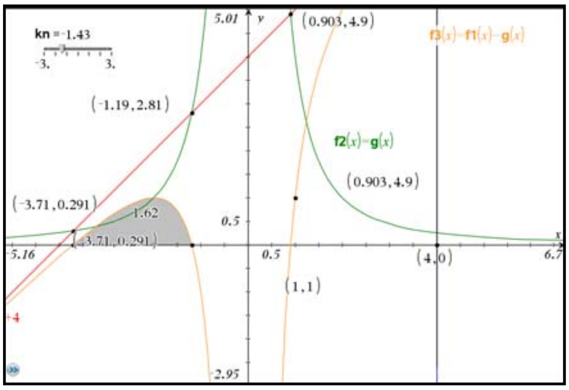
2.5

EA 107 Gebr. Rat und Gerade



2.6

EA 107 Gebr. Rat und Gerade



2.7

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form

EA 108 Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall [-2; 2]!
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche unter dem Graphen im Intervall [1; 3]!
c) Der Graph der Funktion schließt mit der Abszissenachse eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie deren Inhalt!
d) Die Tangente an den Graphen im Punkt (0; 1) und der Graph begrenzen im 1. Quadranten eine Fläche vollständig. Berechnen Sie deren Inhalt! GTA

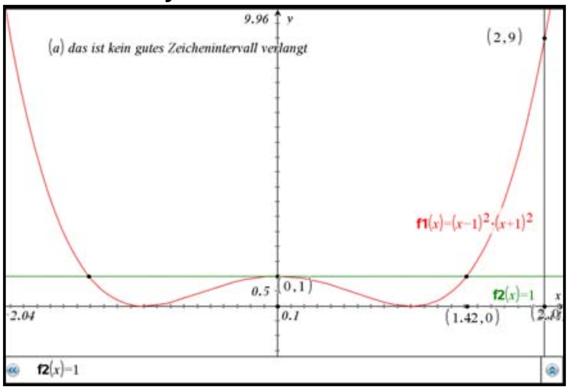
$f(x):=(x-1)^2\cdot(x+1)^2 \blacktriangleright$ *Fertig* Der Funktionsterm besteht aus einfachen Glasbaussteinen, zwei formgleichen Parabeln, die symmetrisch zur y−Achse liegen. Noch deutlicher ist die Symmetrie zur y−Achse nach einer Umformung nach der 3. binomischen Formel:

termq$:=(x^2-1)^2 \blacktriangleright (x^2-1)^2$. f ist also symmetrisch und berührt die x−Achse von oben bei x=1 und x=−1. Damit hat f eine gerade W−Form. Damit ist das Maximum auf der y−Achse bei $f(0)$, also im Punkt (0,1). Für eine Funktion 4. Grades sind mehr als diese drei Extrema nicht möglich. Sie erzwingen dann zwei Wendepunkte.

Es ist nicht ersichtlich, warum man das Zeichenintervall [−2,2] nennt, dann aber das Intergral bis x=3 verlangt.

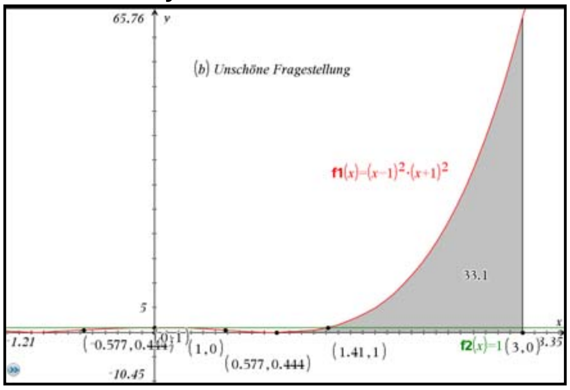
3.1

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form



3.2

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form



3.3

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form

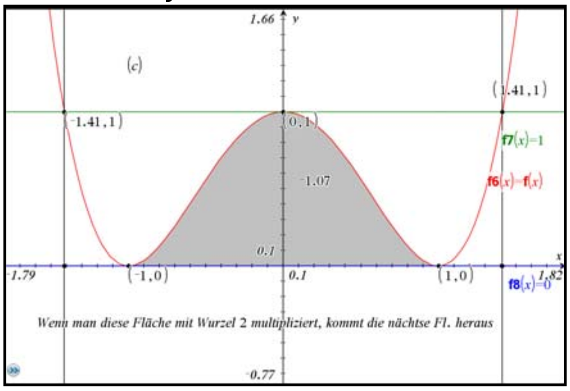
b) Aber bitte: **fl**$:=\int_1^3 f(x)\,dx \blacktriangleright \frac{496}{15}$ **fl** $\blacktriangleright 33.0667$ Wollte man dies von Hand machen, müsste man erste die Klammern auflösen: **term** $\blacktriangleright 2\cdot x^2-x^4$ und das unbestimmte Integral ist dann $\int$ **term** $dx \blacktriangleright \frac{2\cdot x^3}{3}-\frac{x^5}{5}$

c) Da die Berührnullstellen klar sind, ist ersichtlich ist gemeint **fc** $\blacktriangleright \frac{16}{15}$ **fc** $\blacktriangleright 1.06667$

d) Wegen $f(0) \blacktriangleright 1$ schließen die Gerade $y=1$ und f die gemeinte Fläche ein.
Bestimmung der Schnittstellen **xs**$:=\text{zeros}(1-f(x),x) \blacktriangleright \{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$, passt zur zeichnerisch ermittelten Lösung. **term**$:=\text{expand}(1-f(x)) \blacktriangleright 2\cdot x^2-x^4$, damit man von Hand integrieren könnte.

3.4

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form



3.5

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form

weiter d)

Im 1. Quadranten ist also **xs** $\blacktriangleright \{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$ und das gemeinte Integral ist

fd$:=2\cdot\int_0^{xs[3]}(1-f(x))dx \blacktriangleright \frac{16\cdot\sqrt{2}}{15}$

Das ist übrigens $\frac{\sqrt{2}\cdot 16}{15} \blacktriangleright \frac{16\cdot\sqrt{2}}{15}$ oder: Die Fläche aus c) muss man mit $\sqrt{2}$ malnehmen, um die Fläche aus d) zu erhalten.

Diese Eigenschaft wird dann für alle Polynome 4. Grades gelten.

Siehe Extragraph−Fenster

Multipliziert man die Mittelflächemit Wurzel(2), kommt die Fläche zwischen f und y=1 heraus. Wieder wird dgl. nicht betrachtet. Sie Extraaufgabe

3.6

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form

Extraaufgaben, Ergänzungen zu EA 108

Welchen Anteil haben die in c) und d) berechneten Flächen in dem Kasten, der sich mit der x−Achse, der Geraden y=1 und den Senkrechten an den Schnittstellen ergibt? (Pantherkäfig) Dieser hat den Flächeninhalt **fpk**$:=2\cdot$**xs**$[3]\cdot 1 \blacktriangleright 2\cdot\sqrt{2}$

fc$:=\frac{16}{15} \blacktriangleright \frac{16}{15}$ **fd** $\blacktriangleright \frac{16\cdot\sqrt{2}}{15}$ $\frac{\mathbf{fd}}{\mathbf{fpk}} \blacktriangleright \frac{8}{15}$ $\frac{\mathbf{fc}}{\mathbf{fpk}} \blacktriangleright \frac{4\cdot\sqrt{2}}{15}$ **fc**$\cdot\sqrt{2} \blacktriangleright \frac{16\cdot\sqrt{2}}{15}$

rest$:=$**fpk**$-$**fd**$-$**fc** $\blacktriangleright \frac{14\cdot\sqrt{2}}{15}-\frac{16}{15}$ **unten**$:=$**fc**$+$**rest** $\blacktriangleright \frac{14\cdot\sqrt{2}}{15}$ $\frac{\mathbf{fd}}{\mathbf{unten}} \blacktriangleright \frac{8}{7}$

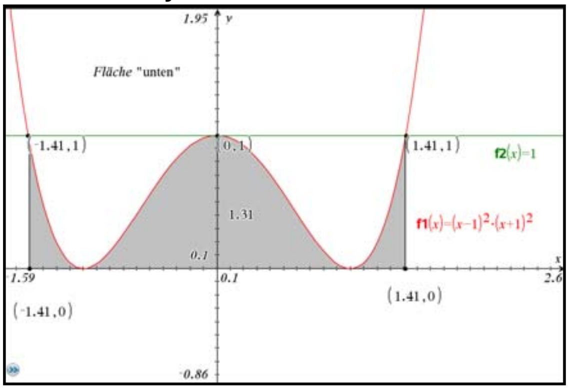
$\int_{xs[1]}^{xs[3]} f(x)\,dx \blacktriangleright \frac{14\cdot\sqrt{2}}{15}$ Probe für "unten".

Das ist ein schönes Verhältnis: Nennt man die Fläche aus d) **oben**$:=$**fd** $\blacktriangleright \frac{16\cdot\sqrt{2}}{15}$

so verhält sich oben zu unten wie $\frac{\mathbf{oben}}{\mathbf{unten}} \blacktriangleright \frac{8}{7}$ Dass alles gilt auch schräg.

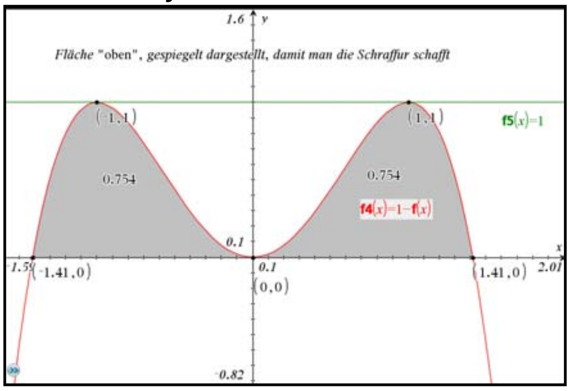
3.7

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form



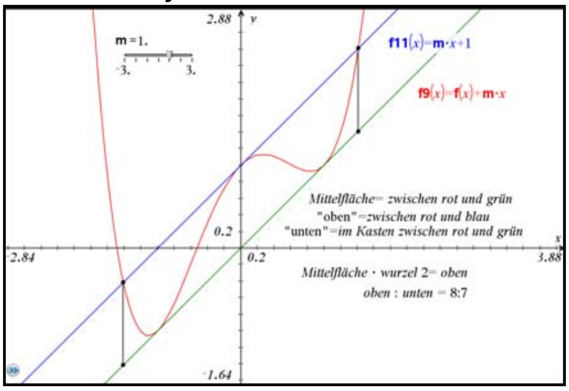
3.8

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form



3.9

EA 108 Polynom 4.Gr. W-Form



3.10

EA 109 zwei Parabelscharen

EA 109 Gegeben sind die Funktionenscharen f_t und g_t mit $f_t(x) = -\frac{1}{t^2}x^2 + 1$ und $g_t(x) = -\frac{1}{t}x^2 + t$ $(0 < t < 1)$.

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_t und g_t für $t = \frac{1}{2}$!

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f_t und g_t eingeschlossen wird!

c) Für welchen Wert von t wird dieser Flächeninhalt maximal?

$f(x) := \frac{-1}{t^2} \cdot x^2 + 1$ ▸ *Fertig* $g(x) := \frac{-1}{t} \cdot x^2 + t$ ▸ *Fertig* Es wird hier betrachtet 0<t<1

Beiede Parabeln sind symmetrische zur y−Achse. Für t=1 stimmen beide Funktionen überein und scheiden die y−Achse bei y=1. Die Fläche zwischen ihnen ist Null. Für kleinere t werden beide Parabeln enger,aber ist g weiter geöffnet als f und der Scheitel von g wandert nach unten, bleibt aber für positive t im Positiven. Der Scheitel von f bleibt fest. Für t nahe Null werden beide Parabeln sehr schmal unte die Fläche zwischen Ihnen wird sehr klein. Daher kann man ein Flächenmaximum erwarten. Berechnungen: Schnittpunkte $xs := \text{zeros}(f(x) - g(x), x)$ ▸ $\{-t, t\}$ Die Schnittstellen werden direkt durch t angegeben.

4.1

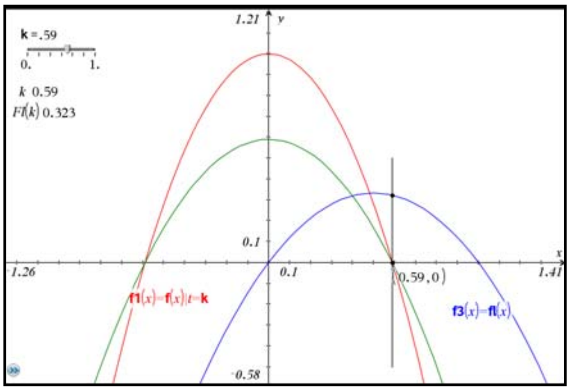
EA 109 zwei Parabelscharen

$\int_{-t}^{t} (f(x) - g(x))\,dx$ ▸ $\frac{-4 \cdot t \cdot (t-1)}{3}$ $fl(t) := \frac{-4 \cdot t \cdot (t-1)}{3}$ ▸ *Fertig* Dieses ist ebenfalls eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen t=0 und t=1. Diese entsprechen der Erwartung. Als Parabel hat sie ihren Scheitel bei $t = \frac{1}{2}$. Also ist die die maximale Fläche

$fl\left(\frac{1}{2}\right)$ ▸ $\frac{1}{3}$

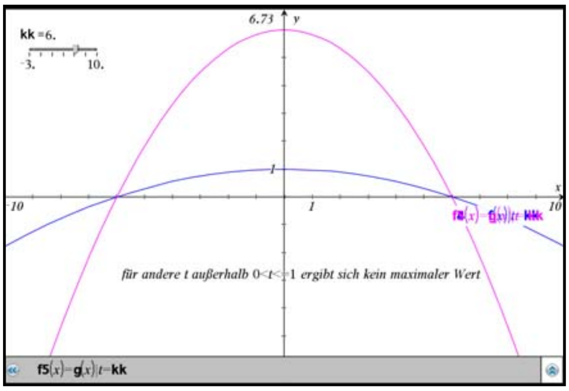
4.2

EA 109 zwei Parabelscharen



4.3

EA 109 zwei Parabelscharen



4.4

EA 110 Hyperbel und Gerade

a) Überprüfen Sie, ob f Extremstellen besitzt! Ermitteln Sie $\lim_{x\to\infty} f(x)$!

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen beider Funktionen! Skizzieren Sie beide Funktionen in ein Koordinatensystem!

c) Berechnen Sie das Flächenstück, das die Graphen beider Funktionen vollständig einschließen!

$f(x) := \frac{1}{x}$ ▸ *Fertig* $g(x) := -4 \cdot x + 5$ ▸ *Fertig*

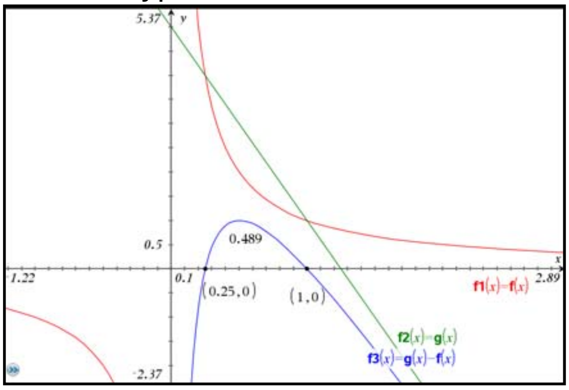
a) Es handelt sich um die übliche Hyperbel, die hat in dieser Lage keine Extremstellen und strebt für x gegen Unendlich gegen 0. (Soetwas kann man nicht fragen, wenn es überhaupt Unterricht gegeben hat, dann gab es die Hyperbel.)

b) Schnittpunkte $xs := \text{zeros}(g(x) - f(x), x)$ ▸ $\left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$ Im Graphfenster ist diese Differenzfunktioen auch gezeichnet, da man sonst die Zwischenfläche nicht schraffieren könnte.

c) $fl := \int_{xs[1]}^{xs[2]} (g(x) - f(x))\,dx$ ▸ $\frac{15}{8} - 2 \cdot \ln(2)$ fl ▸ 0.488706 , nix Besonderes.

5.1

EA 110 Hyperbel und Gerade



5.2