Probleme 1

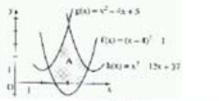
Aufgaben zur Analysis aus TCP 2001 Paetec-Verlag Haftendorn 2011

3898181014 Aufgabenbuch Intergal-Kapitel EA 78-80 und EA 95-121

Hier sind in verschiedenen Problemen die interessanteren Aufgaben versammelt.

In dieser Datei sind die Aufgaben EA 96 bis EA 101 gelöst.

EA 96 Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A, die von den Graphen der Funktionen f, g und h auf die nebenstehende Weise eingeschlossen wird.
Es sei $f(x) = (x-4)^2 - 1$,
$g(x) = x^2 - 4x + 5$,
$h(x) = x^2 - 12x + 37$



EA 98 Der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{4x}$ wird an der Geraden $f(x) = x$ gespiegelt. Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die Original- und Bildgraph einschließen? (Fertigen Sie eine Skizze an!)

EA 99 Zeichnen Sie das Rechteck ABCD mit A(0; 0), B(2; 0), C(2; 4) und D(0; 4). In welchem Verhältnis teilt die Normalparabel (Graph der Funktion $f(x) = x^2$) die Fläche des Rechtecks?

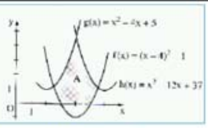
EA 100 In welchem Verhältnis teilt der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ den Flächeninhalt des Quadrates mit den Eckpunkten A(0; 0), B(2; 0), C(2; 2) und D(0; 2)?

EA 101 In welchem Verhältnis teilt der Graph der Funktion $f(x) = x + 3$ die von den Graphen der Funktionen $g(x) = -x^2 + 9$ und $h(x) = x^2 - 9$ eingeschlossene Fläche? (Fertigen Sie eine Skizze an!)

1.1

Probelm EA 96

EA 96 Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A, die von den Graphen der Funktionen f, g und h auf die nebenstehende Weise eingeschlossen wird.
Es sei $f(x) = (x-4)^2 - 1$,
$g(x) = x^2 - 4x + 5$,
$h(x) = x^2 - 12x + 37$



$g(x):=x^2-4\cdot x+5 \blacktriangleright$ *Fertig* $f(x):=(x-4)^2-1 \blacktriangleright$ *Fertig* $h(x):=x^2-12\cdot x+37 \blacktriangleright$ *Fertig*

Vermutung für Scheitelformen dieser Parabeln

$\text{expand}\left((x-2)^2+1\right) \blacktriangleright x^2-4\cdot x+5$ passt, $\text{expand}\left((x-6)^2+1\right) \blacktriangleright x^2-12\cdot x+37$ passt.

Eigentlich ist vorherzusehen, dass die am mittleren Schnittpunkt unterteilte Fläche links und rechts gleich groß ist.

$\text{ali}:=\int_{2.5}^{4}(g(x)-f(x))\,dx \blacktriangleright 4.5$ $\text{are}:=\int_{4}^{5.5}(h(x)-f(x))\,dx \blacktriangleright 4.5$

Das bestätigt sich auch. Die Gesamtfläche ist also $2\cdot 4.5 \blacktriangleright 9.$

2.1

Probelm EA 96

Die Schnittpunkte sind im Graph-Fenster numerisch erzeugt und abgelesen.

Berechnung $\text{solve}(g(x)=h(x),x) \blacktriangleright x=4$ war aus Symmetriegründen klar.

Berechnung $\text{solve}(g(x)=f(x),x) \blacktriangleright x=\frac{5}{2}$, und $\text{solve}(h(x)=f(x),x) \blacktriangleright x=\frac{11}{2}$ liegt symmetrisch zu x=4.

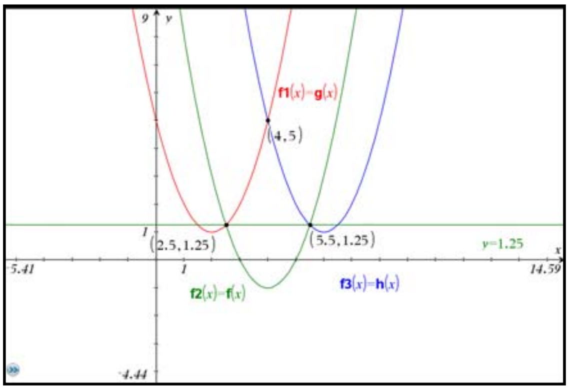
Beschaffung der Stammfunktionen

$\int(g(x)-f(x))\,dx \blacktriangleright 2\cdot x^2-10\cdot x$ $\int(h(x)-f(x))\,dx \blacktriangleright 22\cdot x-2\cdot x^2$

Übrigens hat ein Rechteck um die blütenförmige Fläche den Inhalt 15, die Blüte selbst nimmt die Fläche 9 ein, das sind exakt 60%.

2.2

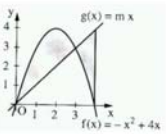
Probelm EA 96



2.3

Problem EA 97

EA 97 Für welchen Wert von m sind die beiden markierten Flächen gleich groß?



Gerade $g(x):=m\cdot x \blacktriangleright$ *Fertig* Parabel $f(x):=-x^2+4\cdot x \blacktriangleright$ *Fertig*

Schnitt $\text{solve}(g(x)=f(x),x) \blacktriangleright x=-(m-4) \text{ or } x=0$ Also $\text{xs}:=4-m \blacktriangleright 4-m$

Nullstellen der Parabel $\text{solve}(f(x)=0,x) \blacktriangleright x=0 \text{ or } x=4$

Also Ansatz $\text{solve}\left(\int_{0}^{\text{xs}}(f(x)-g(x))\,dx=\int_{\text{xs}}^{4}(g(x)-f(x))\,dx,m\right) \blacktriangleright m=\frac{4}{3}$

Das passt zum zum Bild.

3.1

Problem EA 97

Dort kann man die Integrale nur an der Differenzfunktion visualisieren (leider).

Um sowohl Zeichnen als auch weiter allgemein rechnen zu können, ist der Schieberegler k getauft und die Zeichnung ist mit $g(x)|m=k$ ermöglicht.

Dadurch kann g dynamisch visualisiert werden, ohne, dass man m festlegt.

Weitere Berechnungen:

$\text{xs} \blacktriangleright 4-m$

$\int(f(x)-g(x))\,dx \blacktriangleright \frac{-x^3}{3}-\frac{(m-4)\cdot x^2}{2}$ $\text{li}:=\int_{0}^{\text{xs}}(f(x)-g(x))\,dx \blacktriangleright \frac{-(m-4)^3}{6}$

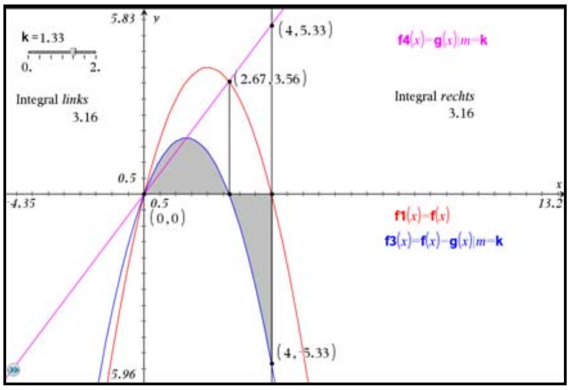
$\text{re}:=\int_{\text{xs}}^{4}(f(x)-g(x))\,dx \blacktriangleright \frac{m^2\cdot(m-12)}{6}$ und es ist $\text{li}=-\text{re} \blacktriangleright \frac{-(m-4)^3}{6}=\frac{-m^2\cdot(m-12)}{6}$

zu lösen. $\text{expand}(\text{li}+\text{re}=0) \blacktriangleright \frac{32}{3}-8\cdot m=0$ Diese Gleichung kann man leicht von Hand lösen:

es kommt 4/3 heraus. Das ist die zu Obigem passende Lösung.

3.2

Problem EA 97



3.3

Problem EA 98

EA 98 Der Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{4x}$ wird an der Geraden $f(x) = x$ gespiegelt. Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die Original- und Bildgraph einschließen? (Fertigen Sie eine Skizze an!)

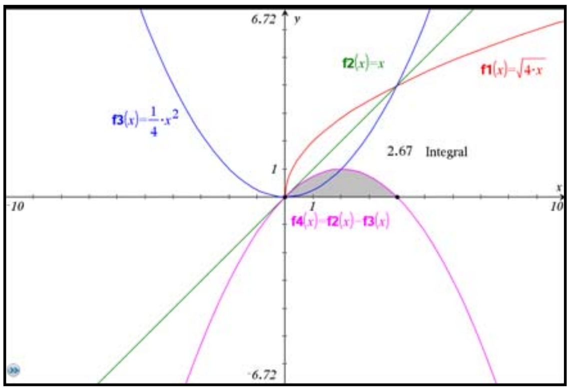
$y=\sqrt{4\cdot x} \blacktriangleright y=2\cdot\sqrt{x}$ Umkehrfunktion $f(x):=\frac{1}{4}\cdot x^2 \blacktriangleright$ *Fertig*

Die gesamte Fläche ist das Doppelte der Fläche zwischen der Winkelhabierendenund der Parabel

$\int_{0}^{4}(x-f(x))\,dx \blacktriangleright \frac{8}{3}$ Also die gesuchte Fläche ist $\frac{16}{3} \blacktriangleright \frac{16}{3}$

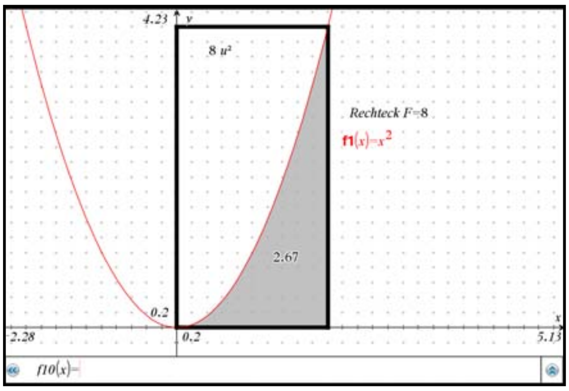
4.1

Problem EA 98



4.2

Problem EA 99+100



5.1

Problem EA 99+100

EA 99 Zeichnen Sie das Rechteck ABCD mit A(0; 0), B(2; 0), C(2; 4) und D(0; 4). In welchem Verhältnis teilt die Normalparabel (Graph der Funktion $f(x) = x^2$) die Fläche des Rechtecks?

EA 100 In welchem Verhältnis teilt der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ den Flächeninhalt des Quadrates mit den Eckpunkten A(0; 0), B(2; 0), C(2; 2) und D(0; 2)?

Eine Bärenkasten–Aufggabe,klar, die Parabel nimmt 1/3 ein.

$\frac{8}{3} \blacktriangleright 2.66667$ Probe $\int_0^2 x^2\,dx \blacktriangleright \frac{8}{3}$

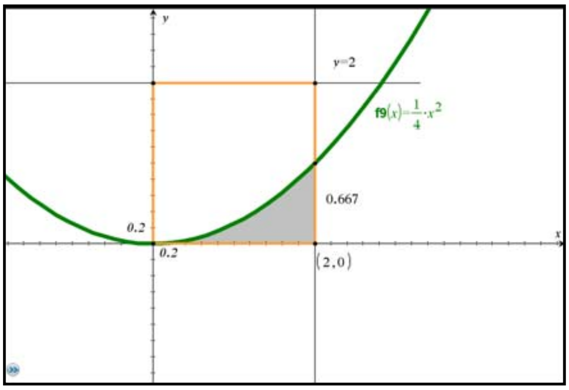
EA 100

Auch ein direkt lösbarer Fall: Schnitt mit Quadrat in Höhe 1, Bärenkasten,

davon nimmt die Parabel $\frac{1}{3}$ ein. $aa:=\frac{1}{3}\cdot 2 \blacktriangleright \frac{2}{3}$ Damit ist der Anteil $\frac{\frac{2}{3}}{4} \blacktriangleright \frac{1}{6}$

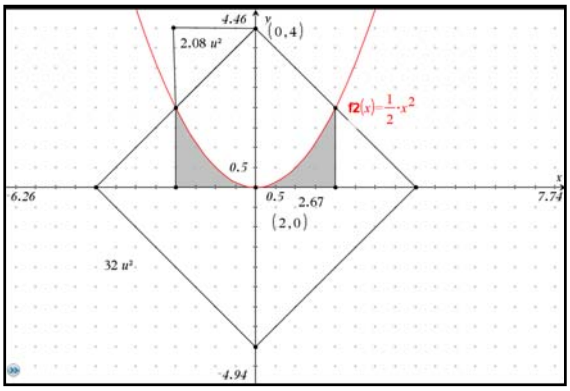
5.2

Problem EA 99+100



5.3

Problem EA 99+100



5.4

Problem EA 99+100

Variante von EA 100

Welchen Flächenanteil schneidet die beiden Parabeln aus dem Quadrat heraus?

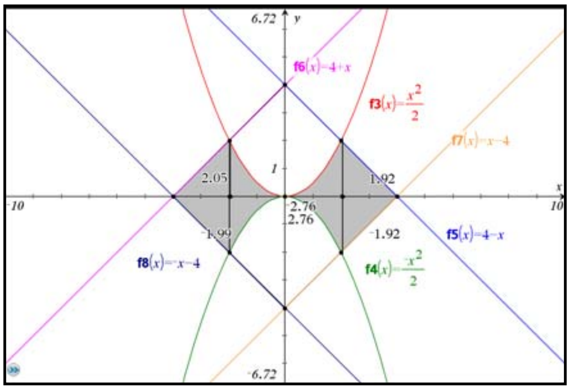
Eine Parabel $p(x):=\frac{1}{2}\cdot x^2 \blacktriangleright$ *Fertig* passt.

Kantengerade y=−x+4, Schnitt $\text{solve}\left(\frac{1}{2}\cdot x^2=-x+4,x\right) \blacktriangleright x=-4 \text{ or } x=2$

$orange:=4\cdot\int_0^2\left(-x+4-\frac{1}{2}\cdot x^2\right)dx \blacktriangleright \frac{56}{3}$ Das Quadrat hat Diagonale 8, also Flächeninhalt 32. Damit ist das Verhältnis $\frac{56}{3\cdot 32} \blacktriangleright \frac{7}{12}$ etwas mehr als die Hälfte.

5.5

Problem EA 99+100



5.6

Problem EA 99+100

Zweite Figur

$a=\frac{4\cdot 4}{3}+4\cdot 2 \blacktriangleright a=\frac{40}{3}$

Probe $\frac{40}{3}+\frac{56}{3} \blacktriangleright 32$ passt.

5.7

Problem EA 101

EA 101 In welchem Verhältnis teilt der Graph der Funktion $f(x) = x + 3$ die von den Graphen der Funktionen $g(x) = -x^2 + 9$ und $h(x) = x^2 - 9$ eingeschlossene Fläche? (Fertigen Sie eine Skizze an!)

$f(x):=x+3$ ▸ *Fertig* $g(x):=-x^2+9$ ▸ *Fertig* $h(x):=x^2-9$ ▸ *Fertig*

Die Fläche unter einer der oberen Parabel ist zwei Drittel des Kastens der Breite 6 und der Höhe 9 $a1:=\frac{2}{3}\cdot 6\cdot 9$ ▸ 36 Gesamtfläche also $2\cdot a1$ ▸ 72.

Schnitt der Geraden y=x+3 mit der Parabel:

$\text{solve}(9-x^2=x+3,x)$ ▸ $x=-3$ or $x=2$

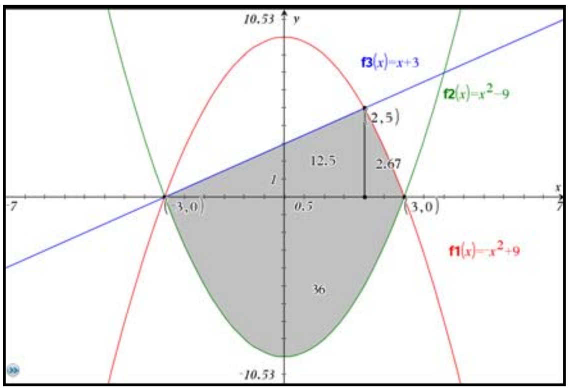
Oben bleibt die Fläche $\text{oben}:=\int_{-3}^{2}(g(x)-f(x))\,dx$ ▸ $\frac{125}{6}$ Es ist dann

$\text{unten}:=72-\text{oben}$ ▸ $\frac{307}{6}$ $ii:=\int(g(x)-f(x))\,dx$ ▸ $\frac{-x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6\cdot x$

Das Verhältnis ist $\frac{\text{oben}}{\text{unten}}$ ▸ $\frac{125}{307}$ $\frac{\text{unten}}{\text{oben}}$ ▸ $\frac{307}{125}$ (kein schönes Ergebnis!)

6.1

Problem EA 101



6.2