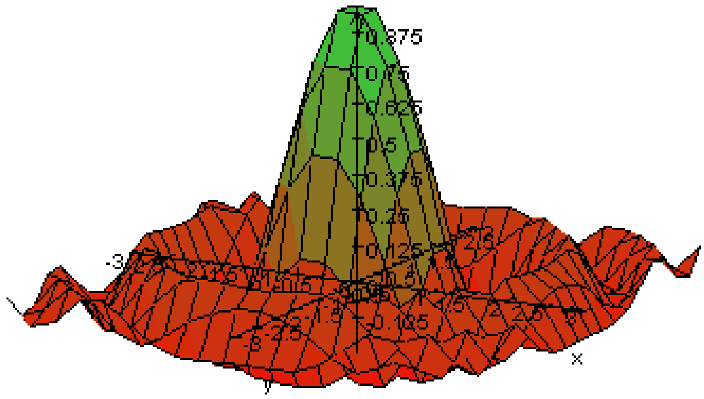
Sombrero

sombrero.pdf

Dr. Dörte Haftendorn Johanneum 7. Juli 1999

Die Funktion f mit $z = f(x,y) = \dfrac{\cos(x^2 + y^2)}{1 + x^2 + y^2}$ ist häufig unter dem Namen "Sombrero" in den Computerwerkzeugen als Beispiel verwendet. So ist es in Derive und in Winfunktion. Diese Zeichnung stammt aus MuPAD.



a) Wie hoch ist das Maximum?
b) Zeigen Sie: Auf konzentrischen Kreisringen werden gleichhohe Werte erreicht.

c) Welche Höhe und Lage hat der erste "Maximumring" etwa?

d) Skizzieren Sie den Schnitt senkrecht zur y-Achse, der den Ursprung enthält. Wie verhalten sich die "Sombrerowellen" für x gegen Unendlich, wie sieht der Sombrero "außen" aus?

Anmerkung: Betrachten Sie dazu die Funktion $z = f(x,0) = \dfrac{\cos(x^2)}{1 + x^2}$

e) Bilden Sie die Taylorreihen der Zählerfunktion und der Funktion h mit $h(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ aus der Kosinusreihe und der geometrischen Reihe $g(x) = \dfrac{1}{1 + x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$. Bestimmen Sie damit die Taylorreihe 6. Grades für f (x,0). Wie viele Extrema und wie viele Nullstellen können Polynome 6. Grades höchstens haben? Geben Sie mit Hilfe dieser Überlegung an, wie weit das Taylorpolynom allerhöchstens als Näherung brauchbar ist.
f) Konstruieren Sie einen Sombrero, der exponentiell gegen die x-y-Ebene strebt.
g) Beurteilen Sie die Möglichkeit, für Ihren oder den gegebenen Sombrero das Rotationsvolumen unter dem Hauptmaximum exakt auszurechnen.
h) Konstruieren Sie einen Sombrero, mit Pol [Lücke] im Ursprung.
i) Uni, neu 11/03:
Stellen Sie den Sombrero als Rotationskörper von f(x,0) dar.